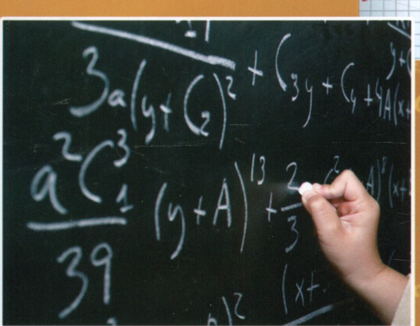
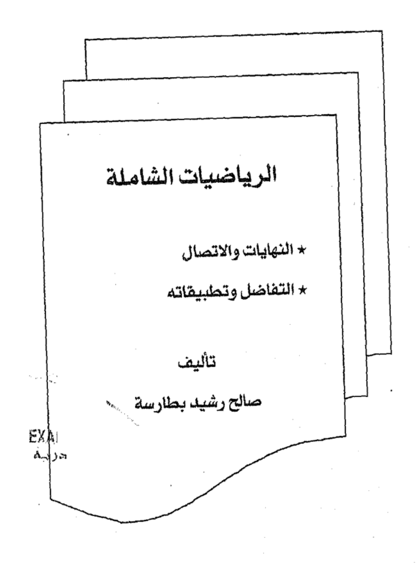
الرياضيات الشاملة

النهايات والاتصال
التفاضل وتطبيقاته

صالح رشيد بطارسة







دار أسامة للنشر والتوزيع

الأردن – عمان

الناشر

دار أسامة للنشر و التوزيع

الأردن — عمان

- **هاتف :** 5658252 – 5658253
- **فاكس :** 5658254
- **العنوان : العبدلي- مقابل البنك العربي**

ص. ب : 141781

Email: darosama@orange.jo

www.darosama.net

الطبعة الأولى

2014م

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية

(2013/6/2214)

510

بطارسة، صالح رشيد

الرياضيات الشاملة/صالح رشيد بطارسة.- عمان: دار أسامة للنشر والتوزيع، 2013.

( ) **ص.**

ر.أ :(2013/6/2214).

الواصفات: الرياضيات/

ISBN: 978-9957-22-385-4

الفهرس

النهايات والاتصال

التفاضل وتطبيقاته

المقدمة

بعد الاتكال على الله، ، ،

قمت بتأليف وإعداد هذه السلسلة من الرياضيات تحت عنوان "الرياضيات الشاملة". بمضمون كامل وعلم وافر وأسلوب نادر، نعم إنه أسلوب علمي بسيط يخلو من الحشو والغموض والتعقيد، كونه يعتمد على الاكثار من الأمثلة والتمارين لتوضيح المصطلحات والمفاهيم دون تكرار منفّر للدارسات والدارسين وبلا إيجاز مُدَّمر للنظريات والقوانين.

من المعلوم أن الرياضيات قديمة قدم الزمان وهبها الله للإنسان منذ أن خلق أبانا آدم وأمنا حواء. ولكن الآن ما عادت الرياضيات كما كانت عليه من أزمان مجرد مجموعة من الرموز والاشارات والأعداد..

ومع أنها كذلك إلاّ أنها أصبحت بالإضافة الى ذلك ضرورة من ضرورات الحياة كالهواء والماء والغذاء.. التي يحتاجها الانسان للقضاء على الجهل والفقر والمرض... تلك الآفات التي لا تتعايش إلا مع من تخلّف من البشر،

لذا لا بُدَّ من القول إن:

الرياضيات جسرٌ للعبور الى عصر التكنولوجيا والعلوم الزاخر بالاختراعات والابتكارات والفنون، والتي نحن بحاجة ماسة اليها جميعاً لتسيير عجلة الحياة بكل يُسر وبلا معاناة.

الرياضيات إن كنت لا تعلم هي بالذات معشوقة الجماهير المحبة للعلم، والقادرة على التفكير، ولكن لا يجرؤ على عشقها من البشر إلا من كان قوي الإرادة سريع البديهة سليم العقل والجسم معاً. وصدق من قال في هذا المضمار "العقل السليم في الجسم السليم". وأصدق منه من يقول: "الرأس بلا تفكير كالإناء المشروخ، كلاهما يستحق التكسير".

- الرياضيات إن كنت لا تدري تُنمي الذكاء وتُشذِّب الأخلاق وتسمو بالإنسان الى العلاء، كيف لا؟ وجميع رواد الفضاء من العلماء والرياضيين (علماء الرياضيات).

- الرياضيات لا تحتاج من دارسها الكثير من الجهد والعناء، بل يجب عليه الإلمام البسيط بالقوانين والنظريات، ولكن ليس كالببغاوات بالحفظ دون الفهم! وإنما تحتاج الى التدريب الكتابي الكافي، وباستمرار مع الدقة والإتقان والسرعة قدر الإمكان.

- فيادارس الرياضيات عليك استخدام "الورقة والقلم" أفضل وسيلة لدراسة العلوم قاطبة، ، ، لتصبح بعد مدة من الزمن من علماء الرياضيات البارزين.. ونؤكد ونختم على ذلك بقولنا آمين!...

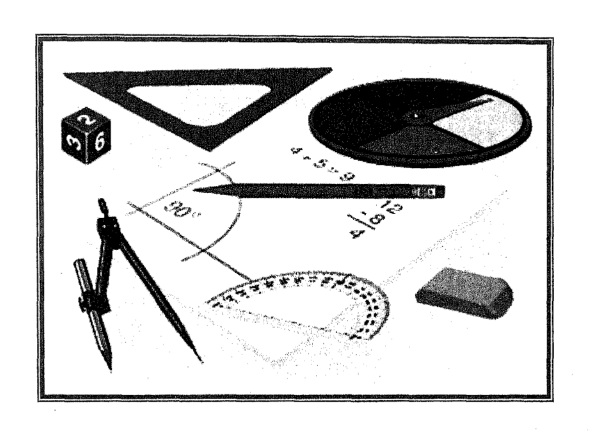
المؤلف

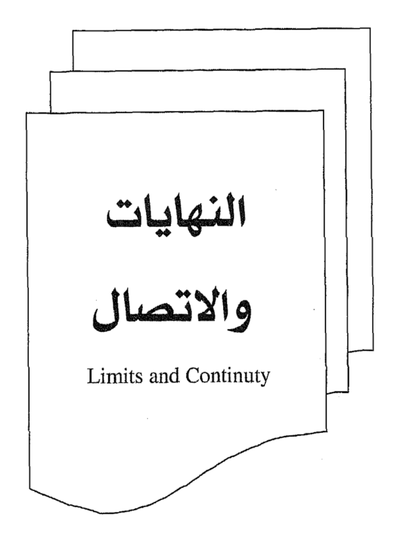
تنويه

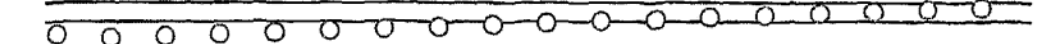
في هذا السياق لا بد لي من أن أنبه الى هذه الملحوظة منذ البداية فأقول:

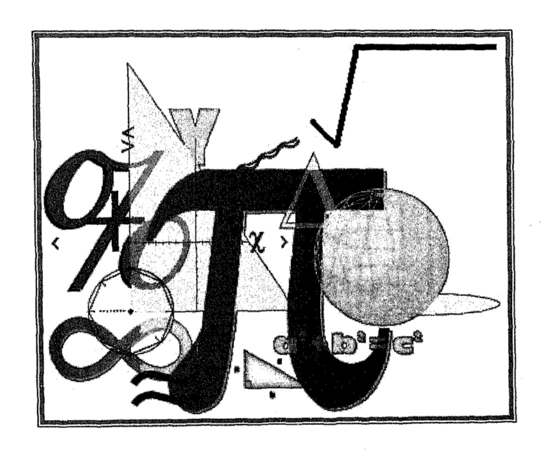
بما أننا نعيش عصر العلم والتكنولوجيا، وجب علينا استخدام الحواسيب والآلات الحاسبة لتسهيل اجراء العمليات الرياضيات، واستخراج نتائجها بكل دقة واتقان، وبالسرعة التي يتصف بها هذا الزمان".

المؤلف




النهايات
والاتصال
Limits and Continuty





(٢٠ - ١) النهاية Limit:

إذا كانت قيمة المتغير س لا تساوي العدد الحقيقي أ ، فإن قيمته تكون أكبر من أ أو أصغر منه ويمكن أن تقترب قيمة المتغير س من أ قرباً كافياً بحيث لا تزيد عن أ أو تقل عنه إلا بمقدار موجب وضئيل جداً ، عندها نقول أن قيمة س تقترب من أ.

فإذا كانت قيمة س أكبر من أ وبدأت تقل حتى تصل أ فإننا نقول أن قيمة س تقترب من أ من اليمين ونعبر عن ذلك بالرموز: س ⟵ أ^{+}

وإذا كانت قيمة س أصغر من أ وبدأت تزداد حتى تصل أ فإننا نقول أن قيمة س تقترب من أ من اليسار ونعبر عن ذلك بالرموز: س ⟵ أ^{-}

كما في الشكل:

تقترب من اليسار　　　　تقترب من اليمين

س ⟶ أ ⟵ س

$-\infty$　　أ^{-}　　أ^{+}　　∞

وإذا ما ارتبط هذا الاقتراب بالاقتران كما يلي:

عندما س تقترب من أ من اليمين فإن قيمة الاقتران ق(س) تقترب من العدد الحقيقي: ك حيث ك = ق (أ).

نعبر عن ذلك بالرموز: ق(س) ⟵ ك (تقترب، عندما تقترب س من أ)

وفي النهاية سواء أكان الاقتراب من اليمين أم اليسار فإن قيمة س تساوي أ وهنا فإن قيمة الاقتران ق (س) تساوي ك حيث ك = ق (أ)

يُعبر عن ذلك وبالحالتين كما يلي:

(١) إذا كان الاقتراب من اليمين = الاقتراب من اليسار

(بالنسبة للمتغير س)

بالرموز: إذا كان نها$_{س \leftarrow أ^{+}}$ ق(س) = نها$_{س \leftarrow أ^{-}}$ ق(س) = ك أو ق (أ)

فإن نها$_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ك أو ق (أ)

⇦مثال: إذا كان ق(س) = س^{٣} أوجد نها$_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) (إن وجدت)

نها$_{س \leftarrow ٢^{+}}$ ق(س) = نها$_{س \leftarrow ٢}$ س^{٣} = ق (٢) = (٢)^{٣} = ٨

نها$_{س \leftarrow ٢^{-}}$ ق(س) = نها$_{س \leftarrow ٢}$ س^{٣} = ق (٢) = (٢)^{٣} = ٨

وبما أن: نها$_{س \leftarrow ٢^{+}}$ ق(س) = نها$_{س \leftarrow ٢^{-}}$ ق(س) = ٨

∴ نها$_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = ٨

من اليسار　　من اليمين
س ⟵ ٢ ⟶ س
- ∞　　∞

هذا ويمكن إيجاد نها$_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) مباشرة بالتعويض المباشر هكذا:

نها$_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = (٢)^{٣} = ٨ كون ق (س) كثير حدود.

(٢) أما إذا كان الاقتراب من اليمين ≠ الاقتراب من اليسار

(بالنسبة للمتغير س)

وبالرموز:

إذا كان نها$_{س \leftarrow أ^{+}}$ ق(س) ≠ نها$_{س \leftarrow أ^{-}}$ ق(س)

فإن نها$_{س \leftarrow أ}$ ق(س) غير موجودة ولا تساوي ك = ق(أ) إطلاقاً.

⇦مثال: إذا كان ق(س) = { $س^2$ ، س ≤ ٢ القاعدة الأولى ؛ $س^3$ ، س > ٢ القاعدة الثانية }

أوجد $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) (إن وجدت)

من اليسار ← ٢ → من اليمين

الحل: (خط الأعداد: ∞ - ، ٢ ، ∞)

بما أن العدد ٢ هو نقطة تغيير بالتعريف أي عندها يُغير الاقتران من قاعدة تعريفه

لذا نجد: $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ $س^2$ = $(٢)^2$ = ٤ نأخذ القاعدة الأولى

وإن: $\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ $س^3$ = $(٢)^3$ = ٨ نأخذ القاعدة الثانية

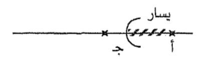
وبما أن $\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س)

فإن $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) غير موجودة.

وبشكل عام: مما سبق نلاحظ أنه لتحديد النهاية عندما تؤول قيمة س إلى عدد حقيقي مثل أ ، من الضروري جداً أن يكون الاقتران معرّفاً حول أ بفترة مفتوحة قصيرة الطول جداً تحتوي أ وليس من الضروري أبداً أن يكون الاقتران معرفاً عند العدد أ بالذات كما في الشكل.

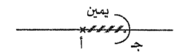
(يسار — أ — يمين)

ولتحديد النهاية من اليسار من الضروري أن يكون الاقتران معرفاً حول أ ومن اليسار بفترة مفتوحة قصيرة الطول جداً على الشكل (جـ ، أ)



ولتحديد النهاية من اليمين من الضروري أن يكون الاقتران معرفاً حول أ

ومن اليمين بفترة قصيرة الطول جداً على الشكل (أ ، جـ)



⇦مثال: إذا كان ق(س) = $\sqrt{س - ٢}$ أوجد إن أمكن كلاً من

(١) نها ق(س) ، (٢) نها ق(س) ، (٣) نها ق(س)
س ← ٢^{+} ، س ← ٢^{-} ، س ← ٢

الرسم للتوضيح

مجال ق(س) هو

س − ٢ ≥ صفر

س ≥ ٢

ص
غير معرف هنا
معرف
س
٢
(اليسار)
(اليمين)

ومن الشكل نلاحظ أن ق(س) غير معرف على يسار العدد ٢ وإنما على اليمين فقط أي أن:

نها ق(س) = $\sqrt{س - ٢}$ = $\sqrt{٢ - ٢}$ = صفر «تعويض مباشر»
س ← ٢^{+} ، س ← ٢

نها ق(س) = غير موجودة لأن ق (س) غير معرف على يسار العدد ٢
س ← ٢^{-}

«ومن هذه وتلك» فإن:

نها ق(س) غير موجودة لأن النهاية من اليسار غير موجودة
س ← ٢

لهذا السبب النهاية غير موجودة في الأطراف لأن العدد أ إذا كان طرفاً في الفترة فإن الاقتران غير معرف على فترة مفتوحة قصيرة الطول من اليسار أو اليمين

وإنما يكون معرفاً على اليمين مثلاً وليس على اليسار (كما في الشكل أعلاه) أو يكون معرفاً على اليسار مثلاً وليس على اليمين.

(٢٠ – ٢) خواص النهايات وطرق إيجادها

سنورد فيما يلي البعض من هذه الخواص على شكل نظريات Limits Theorems بلا براهين ولا إثباتات وإنما نوضحها بالأمثلة فقط، حتى يتسنى لجميع الدارسين والدارسات الإلمام بها بسهولة وبلا غموض ولا تعقيد، ومن خلال السياق سنعرض طرق إيجاد هذه النهايات المتعلقة بالاقترانات الجبرية والدائرية (المثلثية) بشيء من التفصيل المفيد وبدون تطويل، أكيد!!!

كما يلي:

(نظرية ١): «وحدانية النهاية»

إذا وجدت النهاية فهي وحيدة لا ثاني لها على الإطلاق

فإذا كان نها ق(س) = ل ، وكان نها ق(س) = ك
س ← أ   س ← أ

فإن ل = ك حيث أ، ل، ك أعداد حقيقية.

«مفهوم هذه النظرية واضحة للعيان وتحصيل حاصل ومن البديهيات»

(نظرية ٢): (العمليات الثلاث) «جمع وطرح وضرب النهايات»

ليكن نها ق(س) = ل ، ونها هـ (س) = ك
س ← أ   س ← أ

لكل أ، ل، ك أعداد حقيقية فإن:

(١) نها [ق(س) ± هـ (س)] = ل ± ك «جمع وطرح النهايات»
س ← أ

(٢) نها [ق(س) . هـ (س)] = ل . ك «ضرب النهايات»
س ← أ

وكذلك $\lim_{س \to أ}$ م . ق (س) = م . ل حيث م عدد حقيقي «ضرب النهاية بعدد»

(نظرية ٣): نهاية الاقتران الثابت = نفسه

ليكن ق(س) = جـ ، جـ عدد ثابت

فإن $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = جـ نفس القيمة

وهذا يعني أن نهاية الاقتران الثابت عندما تقترب س من أي عدد حقيقي مثل أ تساوي جـ العدد نفسه.

أي أن $\lim_{س \to ٢}$ جـ = جـ ، $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{\pi}{٢}$ = $\frac{\pi}{٢}$ وهكذا

(نظرية ٤): نهاية الاقتران الخطي ق(س) = أس + ب حيث أ، ب أعداد حقيقية، أ ≠ صفر

نستطيع إيجاد نهاية الاقتران الخطي وجميع كثيرات الحدود بالتعويض المباشر توفيراً للوقت والجهد هكذا:

ليكن ق(س) = س ⟵ فإن $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(س)

أي أن $\lim_{س \to -٢}$ (٣س + ٢) = ق (- ٢) + ٢ = - ٤ وهكذا.

(نظرية ٥): نهاية الاقترانات التي تشمل على جذور بمختلف الأدلة

علماً بأن $\sqrt[٢]{\quad}$ الجذر التربيعي دليله = ٢

$\sqrt[٣]{\quad}$ الجذر التكعيبي دليله = ٣

$\sqrt[ن]{\quad}$ الجذر النوني دليله = ن عدد طبيعي

ليكن أ > صفر ، ن عدد صحيح موجب زوجي وفردي لجميع الأدلة

أو أ < صفر ، ن عدد صحيح موجب زوجي وفردي فقط (حالة خاصة) للأدلة الفردية

وكانت $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ل

فإن $\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \to أ} ق(س)} = \sqrt[ن]{ل}$ بالتعويض المباشر

أمثلة $\lim_{س \to ٤} \sqrt{س} = \sqrt{\lim_{س \to ٤} س} = \sqrt{٤} = ٢$

وكذلك $\lim \sqrt[٣]{س - ٥} = \sqrt[٣]{\lim (س - ٥)} = \sqrt[٣]{٤ - ٥} = \sqrt[٣]{-١} = -١$

والتفسير:

أي أن نها الجذر بأي دليل = جذر النهاية لنفس الدليل وبالتعويض المباشر شرط أن يكون ما بداخل الجذر عدد صحيح موجب فقط إن كان الدليل زوجي وأن يكون ما بداخل الجذر عدد صحيح «موجب أو سالب» إذا كان الدليل فردي.

(نظرية ٦): نهاية الاقترانات التي تحتوي أسس حقيقية أو قوى.

لتكن $\lim_{س \to أ} ق(س) = ل \leftarrow$ فإن $\lim_{س \to أ} (ق(س))^{ن} = (ل)^{ن}$ بالتعويض المباشر.

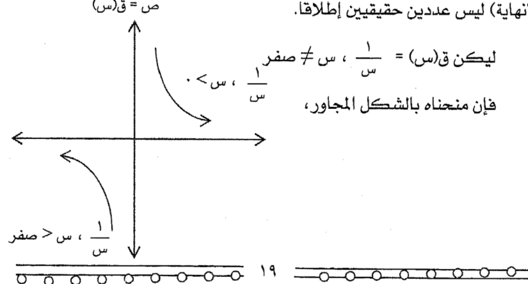
⇦مثال: $\lim_{س \to أ} س^{ن} = أ^{ن}$ وكذلك $\lim_{س \to أ} س^{٥} = (١)^{٥} = ١$ وهكذا

(نظرية ٧): نهاية بعض الاقترانات الحقيقية في المالانهاية

مع الاستعانة بالرسم للتوضيح: علماً بأن الرمزين ∞ (مالانهاية) ، $-\infty$ (سالب مالانهاية) ليس عددين حقيقيين إطلاقاً.

ليكن $ق(س) = \frac{١}{س}$ ، $س \neq$ صفر

فإن منحناه بالشكل المجاور،



من الرسم:

نها $\frac{١}{س}$ (س ← ∞) = صفر (عندما يقترب ق(س) من محور السينات الموجب قُرباً كافياً وكأنه يقطعه!!!)

وكذلك نها $\frac{١}{س}$ (س ← - ∞) = صفر (عندما يقترب ق(س) من محور السينات السالب قُرباً كافياً وكأنه يقطعه!!!)

وبما أن نها $\frac{١}{س}$ (س ← ∞) = نها $\frac{١}{س}$ (س ← - ∞) وبشكل عام:

نها $\frac{١}{س^{ن}}$ (س ← ±∞) = صفر حيث أ عدد حقيقي موجب، ن عدد طبيعي.

⇦مثال: في هذا السياق لابد من توضيح كلاً من الحالتين التاليتين:

الأولى: ومن الرسم:

ص = ق(س)
∞
- ∞

نها $\frac{١}{س}$ (س ← ٠^{+}) = ∞ ، نها $\frac{١}{س}$ (س ← ٠^{-}) = - ∞

∴ نها $\frac{١}{س}$ (س ← ٠) غير موجودة

الثانية:

ص = ق(س)
∞ ∞
س
س > ٠ س < ٠

ق(س) = $\frac{١}{س^{٢}}$ ، س ≠ صفر

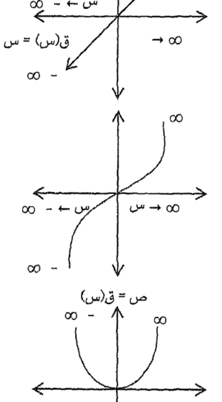
من الرسم

نها $\frac{١}{س^{٢}}$ (س ← ٠^{+}) = ∞ ، نها $\frac{١}{س^{٢}}$ (س ← ٠^{-}) = ∞

∴ نها $\frac{١}{س^{٢}}$ (س ← ٠) = ∞

⇦مثال: نها$_{س \to ٠}$ $\frac{٥}{س^{٢}} = \infty$ ، وكذلك نها$_{س \to ٠}$ $\frac{-٥}{س^{٢}} = \infty$

والآن نها$_{س \to -\infty}$ س $= -\infty$ وكذلك نها$_{س \to \infty}$ س $= \infty$



والشكل يوضح ذلك

وكذلك

نها$_{س \to -\infty}$ $س^{٣} = -\infty$

نها$_{س \to \infty}$ $س^{٣} = \infty$

لكن نها$_{س \to \infty}$ $س^{٢} = \infty$

وكذلك نها$_{س \to -\infty}$ $س^{٢} = \infty$

كما في الشكل

وبشكل عام هنالك حالتان هما:

$$\text{نها}_{س \to \infty} س^{ن} = \begin{cases} \infty ، & \text{ن عدد حقيقي موجب} \\ \text{صفر،} & \text{ن عدد حقيقي سالب} \end{cases}$$

كون $س^{-ن} = \frac{١}{س^{ن}}$ ، س $\neq$ صفر

$$\text{وكذلك: نها}_{س \to -\infty} س^{ن} = \begin{cases} \infty ، & \text{ن عدد زوجي، } ن \geq ٢ \\ -\infty ، & \text{ن عدد فردي، } ن \geq ١ \end{cases}$$

ومن جميع ما سبق يمكن الآن حساب نهاية اقتران نسبي عندما تؤول س إلى ∞ أو إلى - ∞ كما يلي:

إذا كان ق(س) اقتراناً نسبياً، يمكن كتابة قاعدته على الصورة

$$ق(س) = \frac{أ_ن س^ن + أ_{ن-1} س^{ن-1} + \cdots + أ_.}{ب_م س^م + ب_{م-1} س^{م-1} + \cdots + ب_.}$$

وبإخراج العامل $س^ن$ في البسط وإخراج العامل $س^م$ في المقام، يؤول الاقتران إلى:

$$ق(س) = \frac{س^ن \{أ_ن + \frac{أ_{ن-1}}{س} + \cdots + \frac{أ_.}{س^ن}\}}{س^م \{ب_م + \frac{ب_{م-1}}{س} + \cdots + \frac{ب_.}{س^م}\}}$$

وعندما س ← ∞ فإن المقادير $\frac{أ_{ن-1}}{س}$ ، ...، $\frac{أ_.}{س^ن}$

والمقادير $\frac{ب_{م-1}}{س}$ ، ...، $\frac{ب_.}{س^م}$

جميعها بلا استثناء تؤول إلى الصفر وعليه فإن

نها ق(س) = نها $\frac{أ_ن س^ن}{ب_م س^م}$ وهكذا بشكل عام يعطي النتيجة التالية

لإيجاد نهاية الاقترانات النسبية في اللانهاية، فإننا نأخذ الحد الأعلى درجة في البسط والحد الأعلى درجة في المقام كما يلي:

نها ق(س) = نها $\frac{أ_ن س^ن}{ب_م س^م}$ فقط.

حيث م، ن عددان طبيعيان

وينطبق الكلام عندما تؤول س إلى - ∞ أيضاً

وينشأ من جراء ذلك الحالات الثلاث التالية، لإيجاد نهاية الاقتران النسبي في المالانهاية كما يلي:

الأولى: عندما تكون درجة البسط في الاقتران النسبي أصغر من درجة المقام، فنهايته تساوي صفر.

هكذا: $\underset{س \to \infty}{نها} \frac{٢س^٢ - س + ١}{٣س^٤ + ٥س^٢ + ٧} = \underset{س \to \infty}{نها} \frac{٢س^٢}{٣س^٤}$

$= \underset{س \to \infty}{نها} \frac{٢}{٣س^٢} =$ صفر {تطبيقاً على نها $\underset{س \to \infty}{} \frac{أ}{س^ن}$ }

الثانية: عندما تكون درجة البسط في الاقتران النسبي تساوي درجة المقام فنهايته تساوي عدداً حقيقياً $= \frac{\text{معامل البسط}}{\text{معامل المقام}}$

هكذا: $\underset{س \to \infty}{نها} \frac{٣ - ٥س^٢ + ٣س}{٣س^٢ - ٥س + ٧} = \underset{س \to \infty}{نها} \frac{-٥س^٢}{٣س^٢} = \underset{س \to \infty}{نها} \frac{-٥}{٣} = \frac{-٥}{٣}$

{تطبيق على نهاية الثابت = نفسه}

الثالثة: عندما تكون درجة البسط في الاقتران النسبي أكبر من درجة المقام فنهايته تساوي $\pm \infty$

هكذا: $\underset{س \to \infty}{نها} \frac{٤س^٣ - ٥س + ١}{٢س^٢ - ٣س - ٥} = \underset{س \to \infty}{نها} \frac{٤س^٣}{٢س^٢} = \underset{س \to \infty}{نها} \frac{٢س}{١}$

$= \infty$ كون $س^١$ درجته فردي

(نظرية ٨): نهاية الاقترانات الجبرية:

سنورد فيما يلي كيفية إيجاد نهاية الاقترانات الجبرية التالية:

(١) نهاية كثيرات الحدود:

ويتم إيجاد النهاية كما أسلفنا بطريقة التعويض المباشر، علماً بأن التعويض المباشر هو الطريقة الوحيدة لإيجاد قيمة الاقتران بشكل عام عند أي نقطة في مجاله دون تبسيط أو اختصار.

وكأن القيمة والنهاية عند أي نقطة في مجاله يمكن إيجادها بالتعويض المباشر.

⇦مثال: إذا كان ق(س) = س^{٢} - ٥ س + ٣

فإن نها ق(س) = ق(٢) = (٢)^{٢} - ٥(٢) + ٣ = - ٣ / النهاية
س ← ٢

وكذلك القيمة: ق(٢) = ٥(٢) + ٣ = - ٣ / القيمة

أي أن النهاية = القيمة

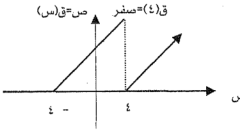
(٢) نهاية الاقتران المتشعب:

والاقتران المتشعب هو الاقتران المعرف على قاعدتين أو أكثر وهنا نحتاج الرسم للتوضيح والنهاية من اليمين واليسار عندما نجد النهاية عند نقطة التغيير بالتعريف.

⇦مثال: إذا كان ق(س) = { س - ٤ ، س ≥ ٤ ؛ س + ٤ ، س < ٤ }

أوجد نها ق(س)، نها ق(س)، نها ق(س)
س ← ٥ ، س ← ٣ ، س ← ٤

استعانة بالرسم المجاور الذي يمثل منحنى ق(س)



نها ق(س) = نها (س − ٤) كون ٥ > ٤ (القاعدة الأولى)
س ← ٥   س ← ٥

= ٥ − ٤ = ١

نها ق (س) = نها (س + ٤) كون ٣ < ٤ (القاعدة الثانية)
س ← ٣   س ← ٣

= ٣ + ٤ = ٧

نها ق(س) هنا نناقش النهاية من اليمين واليسار لأن ٤ نقطة تغيير بالتعريف
س ← ٤
أي عند س = ٤ تنتقل من القاعدة الأولى إلى الثانية.

نها ق (س) = نها (س − ٤) = ٤ − ٤ = صفر من اليمين
س ← ٤+   س ← ٤

نها ق(س) = نها (س+٤) = ٤ + ٤ = ٨ من اليسار
س ← ٤−   س ← ٤

وبما أن نها ق(س) ≠ نهاق(س)
س ← ٤+   س ← ٤−

فإن نهاق(س) غير موجودة
س ← ٤

بينما ق(٤) = ٤− ٤= صفر القيمة تأخذ القاعدة التي تحتوي المساواة أي أن

ق(س) مُعرف على ح عند س = ٤ ولكن نهايته غير موجودة.

⇦مثال: إذا كان ق(س) = { $س^2$ + ٣س، س ≠ ٣ ؛ ٥ ، س = ٣ }

أوجد نها ق(س) ، نها ق(س) ، ق(س)
س ← ٥   س ← ٣

نستعين بالرسم للتوضيح

ملحوظة:

نأخذ القاعدة التي تحوي المساواة لإيجاد القيمة

والقاعدة التي لا تحوي المساواة لإيجاد النهاية وكأنها من اليسار واليمين معاً.

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نها}}\ (\text{س}^{٢} + ٣\text{س}) = ٥^{٢} + ٣\ (٥) = ٢٥ + ١٥ = ٤٠$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ (\text{س}^{٢} + ٣\text{س}) = ٣^{٢} + ٣\ (٣) = ٩ + ٩ = ١٨$$

والتفسير يوضح بإعادة تعريف الاقتران ق(س) هكذا:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٣\text{س}، & \text{س} < ٣ \\ ٥ ، & \text{س} = ٣ \\ \text{س}^{٢} + ٣\text{س}، & \text{س} > ٣ \end{cases}$$

وهند النهاية س ← ٣ معناه $\text{س} \neq ٣$ أي أن $\text{س} < ٣$ أو $\text{س} > ٣$

$$\text{لذلك}\ \underset{\text{س}\leftarrow ٣^{+}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = (\text{س}^{٢} + ٣\text{س}) = ٣^{٢} + ٣\ (٣) = ١٨$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = (\text{س}^{٢} + ٣\text{س}) = ٣^{٢} + ٣\ (٣) = ١٨$$

$$\therefore\ \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ (\text{س}^{٢} + ٣\text{س}) = ٣^{٢} + ٣\ (٣) = ١٨$$

بينما ق(٣) = ٥ مباشرة

لهذا السبب نكتفي بإيجاد النهاية باستخدام $\text{ق(س)} = \text{س}^{٢} + ٣\text{س}$، $\text{س} \neq ٣$ فقط وعند إيجاد القيمة بالقاعدة ق(س) = ٥ ، س = ٣ فقط.

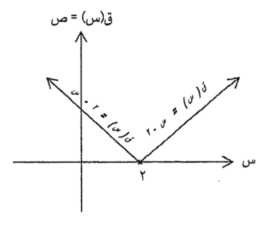
(٣) نهاية اقتران القيمة المطلقة

نبدأ بالمثال إذا كان $\text{ق(س)} = |\text{س} - ٢|$ حيث داخل خطي القيمة المطلقة اقتران خطي أوجد:

نها ق (س) ، نها ق(س) ، نها ق(س)
س ← ١   س ← ٣   س ← ٢

نُعيد تعريفه ونرسم منحناه تسهيلاً للحل هكذا :

س - ٢ = صفر ← س = ٢ صفر الاقتران، و هي نقطة تقاطع منحناه مع محور السينات وتمثله بيانياً بالشكل



أي أن ق(س) = { - (س - ٢)، س < ٢ لأنه سالب
س - ٢ ، س ≥ ٢ لأنه موجب }

أي أن ق(س) = { ٢ - س ، س < ٢
س - ٢ ، س ≥ ٢ }

وكأن الاقتران أصبح اقتراناً متشعباً

نها ق (س) = نها (٢ - س) كون ١ < ٢
س ← ١   س ← ١

= ٢ - ١ = ١

نها ق (س) = نها (س - ٢) كون ٣ > ٢
س ← ٣   س ← ٣

= ٣ - ٢ = ١

نها ق(س)، كون ٢ نقطة تغيير بالتعريف لذا نجد النهاية من اليسار واليمين
س ← ٢

نها ق(س) = نها (٢ — س) = ٢ — ٢ = صفر من اليسار
س ← ٢⁻   س ← ٢

نها ق(س) = نها (س — ٢) = ٢ — ٢ = صفر من اليمين
س ← ٢⁺   س ← ٢

∴ نها ق(س) = صفر كون النهاية من اليسار = النهاية من اليمين
س ← ٢

بينما ق(٢) نعوض في القاعدة التي تحتوي المساواة

أي أن ق(س) = ٢ — ٢ = صفر

وكأن القيمة = النهاية عند س = ٢

ملحوظة هامة:

يمكن إيجاد نهاية اقتران القيمة المطلقة مباشرة وبالتعويض دون إعادة تعريفه إلاّ إذا كانت النقطة المراد إيجاد النهاية عندها هي صفر الاقتران فنجد النهاية من اليسار واليمين كما مر سابقاً.

أي أن نها ق(س) = | ١ - ٢ | = | - ١ | = ١
س ← ١

أي أن نها ق(س) = | ٣ - ٢ | = | ١ | = ١
س ← ٣

إلا أن نها ق (س) يجب إعادة تعريفه وإيجادها من اليسار واليمين.
س ← ٢

⇦مثال: إذا كان ق(س) = | س٢ + ٥ س + ٦ | ما بداخل خطي القيمة المطلقة اقتران تربيعي أوجد:

نها ق(س) ، نها ق(س) ، نها ق(س)
س ← ١   س ← - ٣   س ← - ٢

نجد النهاية بالتعويض المباشر دون إعادة التعريف إلا عند صفريه فالتعويض المباشر والنهاية من اليمين واليسار كلاهما صواب – كما يلي:

إيجاد النهاية بالتعويض المباشر:

نها ق(س) = | (١)^{٢} + ٥ (١) + ٦ | = | ١٢ | = ١٢
س ← ١

نها ق(س) = | (- ٢)^{٢} + ٥ (- ٢) + ٦ | = | ٤ – ١٠ + ٦ | = صفر
س ← ٢

نها ق(س) = | (- ٣)^{٢} + ٥ (- ٣) + ٦ | = | ٩ – ١٥ + ٦ | = صفر
س ← - ٣

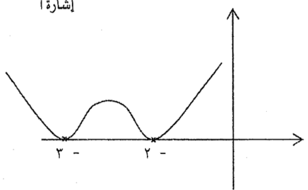
وأما بعد إعادة التعريف واستخدام اليسار واليمين هكذا

س^{٢} + ٥س + ٦ = صفر ← (س + ٣) (س + ٢) = صفر

س = - ٣ ، - ٢ صفرا الاقتران

والرسم يوضح الحل:

+ + +   - - - - - -   + + +
نفس إشارة أ   - ٢   عكس إشارة أ   - ٣   نفس إشارة أ



ق(س)=
- س^{٢} + ٥س + ٦ ، س < - ٣
- - (س^{٢} + ٥س + ٦) ، - ٣ ≤ س < - ٢
- س^{٢} + ٥س + ٦ ، س ≥ - ٢

نها ق(س) = نها (س^{٢} + ٥ س + ٦) كون ١ > - ٢

س ← ١   س ← ١

= ١^{٢} + ٥(١) + ٦ = ١٢ كما مر سابقاً

نها ق(س) : من اليمين هكذا نها ق(س)

س ← ٢   س ← - ٢$^{+}$

نها (س^{٢} + ٥ س + ٦) = (- ٢)^{٢} + ٥(- ٢) + ٦ = صفر من اليمين

س ← - ٢

نها {- (س^{٢} + ٥ س + ٦) } = - { (- ٢)^{٢} + ٥(- ٢) + ٦ } = - صفر

س ← - ٢$^{-}$

= صفرمن اليسار

وبنفس الأسلوب:

نها ق(س) من اليمين واليسار = صفر بالتعويض المباشر

س ← - ٣

لذا:

«يتم إيجاد نهاية اقتران القيمة المطلقة بالتعويض المباشر»

(٤) نهاية اقتران أكبر عدد صحيح [س] أو الاقتران السُلمي أو الدرجي.

بعد إعادة تعريفه بشكل عام هكذا: [س] = ن ⟸ ن ≤ س < ن + ١

لأن [٢,١] = ٢ ≤ ٢,١ < ٣ ⟵ [٢,١] = ٢

وكذلك [- ٢,١] = - ٣ ≤ - ٢,١ < - ٢ ⟵ [- ٢,١] = - ٣

ليكن ق(س) = [أس + ب] ما بداخل القوسين اقتران خطي، يفضل مبدئياً إعادة تعريفه أولاً في فترة تحتوي العدد الذي سوف تؤول إليه س مع الاستعانة بالرسم البياني هكذا:

لإيجاد نها ق(س)، نُعيد تعريفه في الفترة [جـ، د] حيث ك ∋ (جـ، د)
س ← ١

ثم نجد طول الدرجة = $\frac{١}{|\text{معامل س}|}$ ونجد صفر الاقتران على خط الأعداد ثم نضيف أن نطرح طول الدرجة حتى نصل إلى الفترة المطلوبة.

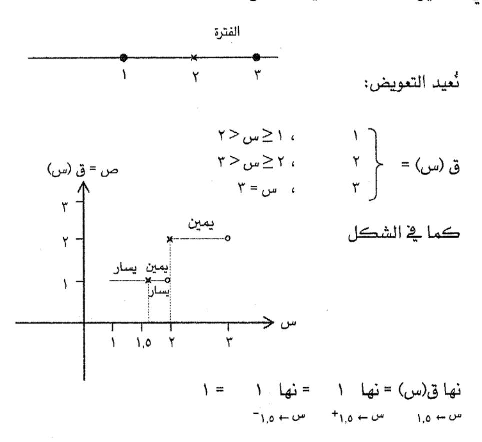
⇦مثال: إذا كان ق(س) = | س | أوجد نها ق (س) ، نها ق (س)
س ← ١,٥   س ← ٢

لإعادة تعريف الاقتران على الفترة التي تحتوي العددين ١,٥ ، ٢ وكيف نبدأ:

طول الدرجة = $\frac{١}{|١|}$ = ١

نصف الاقتران: س = صفر

ثم نضيف طول الدرجة لنحصل على الفترة المناسبة وهي [١ ، ٣] والتي تحتوي العددين ١,٥ ، ٢ كما في الشكل



نُعيد التعويض:

ق (س) = ١ ، ١ ≤ س < ٢
٢ ، ٢ ≤ س < ٣
٣ ، س = ٣

كما في الشكل

نها ق(س) = نها ١ = نها ١ = ١
س ← ١,٥   س ← ١,٥⁺   س ← ١,٥⁻

بالحالتين لأن ١,٥ ليست طرفاً أما نقطة إعادة تعريف الاقتران

نها$_{س ← ٢}$ ق(س): من اليمين واليسار: لأن ٢ نقطة تغيير بالتعريف

نها$_{س ← ٢^+}$ ق (س) = نها$_{س ← ٢}$ ٢ = ٢

نها$_{س ← ٢^-}$ ق (س) = نها$_{س ← ٢}$ ١ = ١

∴ نها$_{س ← ٢}$ ق (س) غير موجودة

وبشكل عام واختصاراً للوقت والجهد نضع القاعدة التالية:

لإيجاد نهاية اقتران أكبر عدد صحيح نعوض العدد المراد إيجاد النهاية عنده في الاقتران كما هو فإذا انتج ما بداخل القوسين عدد صحيح فالنهاية غير موجودة وإذا انتج عدد غير صحيح فالنهاية نفس القيمة هكذا:

نها$_{س ← ١,٥}$ ق (س) = [١,٥] وهذا عدد غير صحيح فالنهاية نفسه

∴ نها$_{س ← ١,٥}$ ق (س) = [١,٥] = ١

وكذلك نها$_{س ← ٠,٧}$ [س + ١] = [١,٧] وهذا عدد غير صحيح فالنهاية نفسه

∴ نها$_{س ← ٠,٧}$ ق [س + ١] = [١,٧] = ١

وكذلك نها$_{س ← ٠}$ [$\frac{١}{٢}$ س - ١] = [$\frac{١}{٢}$ × ٠ - ٢] = [- ٢]

وهذا عدد صحيح فالنهاية غير موجودة

∴ نها$_{س ← ٠}$ ق [$\frac{١}{٢}$ س - ٢] غير موجودة

(٥) نهاية الاقتران النسبي أو نهاية خارج قسمة اقترانين

الاقتران النسبي ل (س) = $\frac{\text{ق (س)}}{\text{هـ (س)}}$ ، هـ (س) = صفر

لتكن نها ق(س) = ل، نها ق(س)= ك، شرط هـ (س)، ك لا تساويان صفر
س ← أ   س ← أ

أي أن المقام ونهاية كلاهما لا يساويان الصفر في كل الأحوال

فإن نها $\frac{\text{ق (س)}}{\text{هـ (س)}}$ = $\frac{\text{ل}}{\text{ك}}$ إذا كان الناتج عدداً حقيقياً، وباستخدام طريقة التعويض المباشر.

⇦مثال: أوجد نها $\frac{\text{٥ س}}{\text{س + ٣}}$ = $\frac{\text{٥ (٢)}}{\text{٢ + ٣}}$ = $\frac{\text{١٠}}{\text{٥}}$ = ٢
س ← ٢

ثم أوجد ق (٢) = $\frac{\text{٥ (٢)}}{\text{٢ + ٣}}$ = $\frac{\text{١٠}}{\text{٥}}$ = ٢

أما إذا كان التعويض المباشر ينتج $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ فالنهاية غير موجودة

⇦مثال: أوجد نها $\frac{\text{٥ س}}{\text{س + ٣}}$ = $\frac{\text{٥ (- ٣)}}{\text{- ٣ + ٣}}$ = $\frac{\text{- ١٥}}{\text{صفر}}$ فالنهاية غير موجودة
س ← ٢

وكذلك ق (- ٣) = $\frac{\text{٥ (- ٣)}}{\text{- ٣ + ٣}}$ = $\frac{\text{- ١٥}}{\text{صفر}}$ فالاقتران غير معرف عند س = - ٣

وأما إذا كان الناتج $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (فالنهاية يمكن أن تكون موجودة أو غير موجودة ولكن طريقة إيجادها ليس بالتعويض المباشر وإنما بطرق أخرى)

⇦مثال: أوجد نها $\frac{\text{س}^2\text{ - ١}}{\text{س - ١}}$
س ← ١

التعويض المباشر = $\frac{\text{(١)}^2\text{ - ١}}{\text{١ - ١}}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فالنهاية لا توجد فقط بطريقة التعويض وإنما بطريقة أخرى.

بينما ق (١) = $\frac{\text{(١)}^2\text{ - ١}}{\text{١ - ١}}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وكون المقام = صفر فالاقتران غير معرف عندما س = ا

وأما النهاية يمكن إيجادها بإحدى الطرق التالية:

وكأننا نريد تبسيط الاقتران لإيجاد النهاية عندما يكون ناتج التعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$ هكذا:

مثال: أوجد نها $\frac{س^{٢} - ٥س - ٦}{س^{٢} - ١}$ = ثم أوجد ق (− ١)

$$التعويض المباشر = \frac{(-١)^{٢} - ٥س - ٦}{س^{٢} - ١} = \frac{صفر}{صفر}$$

هنا نستخدم طريقة التحليل إلى العوامل ثم التعويض بعد ذلك:

$$أي أن نها_{س \leftarrow -١} \frac{س^{٢} - ٥س - ٦}{س^{٢} - ١} = نها_{س \leftarrow -١} \frac{(س - ٦)(س + ١)}{(س - ١)(س + ١)} = نها_{س \leftarrow -١} \frac{س - ٦}{س - ١}$$

$$= \frac{-١ - ٦}{-١ - ١} = \frac{-٧}{-٢} = \frac{٧}{٢}$$

= ق (− ١) وبالتعويض المباشر = $\frac{صفر}{صفر}$ والآن المقام = صفر فالاقتران غير معرف عندما س = − ١ دون تبسيط.

مثال: أوجد نها$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{س^{٤} - ١٦}{س^{٢} - ٢س}$ يمكن التحليل إلى العوامل حتى ولو كانت النهاية بالتعويض المباشر موجودة.

$$= نها_{س \leftarrow ٢} \frac{(س^{٢} - ٤)(س^{٢} + ٤)}{س (س - ٢)} = نها_{س \leftarrow ٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)(س^{٢} + ٤)}{س (س - ٢)}$$

$$= نها_{س \leftarrow ٢} \frac{(س + ٢)(س^{٢} + ٤)}{س} = \frac{(٢ + ٢)(٤ + ٤)}{٢} = \frac{(٤)(٨)}{٢} = ١٦$$

«فالطريقة الأولى هي طريقة التحليل إلى العوامل»

مثال: أوجد نها$_{س \leftarrow ٣}$ $\frac{\frac{١}{س + ١} - \frac{١}{٤}}{س - ٣}$

$$التعويض المباشر = \frac{\frac{١}{٤} - \frac{١}{٤}}{٣ - ٣} = \frac{صفر}{صفر}$$

للتخلص من الصورة $\frac{صفر}{صفر}$ نوحد المقامات في البسط أو المقام لجعله اقتراناً واحداً هكذا.

$$\lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\frac{١}{\text{س}+١} - \frac{١}{٤}}{\text{س} - ٣} = \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\frac{٤ - (\text{س}+١)}{٤(\text{س}+١)}}{\frac{\text{س}-٣}{١}} = \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{٤ - (\text{س}+١)}{٤(\text{س}+١)} \times \frac{١}{\text{س} - ٣}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{٣ - \text{س}}{٤(\text{س}+١)} \times \frac{١}{\text{س} - ٣} = \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{-١}{٤(\text{س}+١)} = \frac{-١}{٤(\text{س}+١)} = \frac{-١}{١٦}$$

«أما الطريقة الثانية هي طريقة توحيد المقامات في البسط أو المقام أو كليهما معاً»

⇦مثال: أوجد $\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\sqrt{\text{س}+٣} - ٢}{\text{س} - ١}$

التعويض المباشر = $\frac{\sqrt{١+٣} - ٢}{١ - ١} = \frac{\sqrt{٤} - ٢}{\text{صفر}} = \frac{٢ - ٢}{\text{صفر}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

للتخلص من الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ تستخدم نطاق البسط أو المقام أو كليهما، أينما الجذر موجود وذلك بضربه في مرافقه إذا كان تربيعياً وإلا فهناك طرق أخرى تناقشها في موضعها ومرافق أي مقدرا جبري يحتوي جذراً (كحالة خاصة) هو نفسه مع اختلاف الإشارة الفاصلة بين القسم المجذور وغير المجذور منه إن وجدا.

⇦مثال: أوجد $\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\sqrt{\text{س}+٣} - ٢}{\text{س} - ١} \times \frac{\sqrt{\text{س}+٣} + ٢}{\sqrt{\text{س}+٣} + ٢}$

$$= \lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}+٣ - ٤}{(\text{س}-١)(\sqrt{\text{س}+٣} + ٢)} = \lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س} - ١}{(\text{س} - ١)(\sqrt{\text{س}+٣} + ٢)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ١} \frac{١}{\sqrt{\text{س}+٣} + ٢} = \frac{١}{\sqrt{٤} + ٢}$$

$$= \frac{١}{٢ + ٢} = \frac{١}{٤}$$

⇦مثال: أوجد نها $_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{\sqrt{س + ٢} - ٢}{\sqrt{س + ٧} - ٣}$ الانطاق أصبح اثنان للبسط والمقام

وباختصار ودون إسهاب:

$$نها_{س \leftarrow ٢} \frac{\sqrt{س + ٢} - ٢}{\sqrt{س + ٧} - ٣} \times \frac{\sqrt{س + ٢} + ٢}{\sqrt{س + ٢} + ٢} \times \frac{\sqrt{س + ٧} + ٣}{\sqrt{س + ٧} + ٣}$$

$$نها \frac{(س + ٢ - ٤)(\sqrt{س + ٧} + ٣)}{(س + ٧ - ٩)(\sqrt{س + ٢} + ٢)} = نها_{س \leftarrow ٢} \frac{\sqrt{س + ٧} + ٣}{\sqrt{س + ٢} + ٢}$$

$$= \frac{\sqrt{٩} + ٣}{\sqrt{٤} + ٢} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$$

لاحظ أن في جميع الأمثلة السابقة عندما يكون ناتج التعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$ فإن المقدار س − أ يكون عاملاً من عوامل البسط والمقام معاً لذا تقسم عليه وتختصره هكذا:

بشكل عام عندما نريد إيجاد نها $_{س \leftarrow أ}$ ل (س) = نها $_{س \leftarrow أ}$ $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ فإن س − أ عاملاً من عوامل ق(س)، هـ (س) دائماً وبعد الانطلاق أو قبله يمكن الاستفادة من هذه الميزة في إيجاد بعض النهايات مع استخدام طريقة القسمة المطولة كما يلي:

⇦مثال: أوجد نها $_{س \leftarrow ٣}$ $\frac{س^{٢} + ٤ س - ٣٩}{س^{٣} - ٢٧}$

بالتعويض المباشر = $\frac{(٣)^{٢} + ٤ (٣) - ٣٩}{(٣)^{٣} - ٢٧} = \frac{صفر}{صفر}$

إذن س − ٣ عامل مشترك في $س^{٢}$ + ٤ س − ٣٩، $س^{٣}$ − ٢٧ حتى وإن كان التحليل غير سهل ولكنه موجود لأن تحليل $س^{٢}$ + ٤ س − ٣٩ يعتمد على نظرية الباقي وفيه بعض الصعوبات (بالنسبة للطالب) والحل يطول لذا فالقسمة

الطويلة هي الأفضل وتفي بالمطلوب.

$$(\text{س}^{٣} + ٤\,\text{س} - ٣٩) \div (\text{س} - ٣)$$

$$= \text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} + ١٣$$

	$\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} + ١٣$
$\text{س} - ٣$	$\text{س}^{٣} + ٤\,\text{س} - ٣٩$
	$\mp\text{س}^{٣} \pm ٣\,\text{س}^{٢}$
	$٣\,\text{س}^{٢} + ٤\,\text{س} - ٣٩$
	$\mp ٣\,\text{س}^{٢} \pm ٩\,\text{س}$
	$١٣\,\text{س} - ٣٩$
	$\mp ١٣\,\text{س} \pm ٣٩$
	$\cdots$

أي أن $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٤\,\text{س} - ٣٩}{\text{س}^{٣} - ٢٧}$

$$= \text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣} \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} + ١٣)}{(\text{س} - ٣)(\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} + ٩)}$$ كفرق مكعبين

$$= \text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣} \frac{\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} + ١٣}{\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} + ٩} = \frac{٣^{٢} + ٣(٣) + ١٣}{٣^{٢} + ٣(٣) + ٩} = \frac{٣١}{٢٧}$$

فالطريقة الثالثة والرابعة هي الانطاق للبسط أو المقام أو الاثنين عندما يكون الدليل الجذر ٢ والقسمة الطويلة وإلا فالطريقة التالية:

⇦مثال: أوجد $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ١} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١}{\sqrt[٤]{\text{س}} - ١}$ التعويض المباشر $= \dfrac{\sqrt[٣]{١} - ١}{\sqrt[٤]{١} - ١} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

للتخلص من الجذرين معاً تستخدم طريقة الفرض لأن الانطاق لغير الجذر التربيعي صعب للغاية.

للأس (حاصل ضرب دليلي الجذرين)

نفرض أن س = ص $= \text{ص}^{٣ \times ٤} = \text{ص}^{١٢}$

أي أن $\text{س} = \text{ص}^{١٢}$

وعندما س ← ١ فإن ص ← ١ أيضاً

لأن $ص^{١٢} = ١^{١٢} = ١$

$$\therefore \text{نها}_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س} - ١}{\sqrt[٤]{س} - ١} = \text{نها}_{ص \to ١} \frac{\sqrt[٣]{ص^{١٢}} - ١}{\sqrt[٤]{ص^{١٢}} - ١} = \text{نها} \frac{(ص^{١٢})^{\frac{١}{٣}} - ١}{(ص^{١٢})^{\frac{١}{٤}} - ١}$$

$$\text{نها}_{ص \to ١} \frac{ص^{٤} - ١}{ص^{٣} - ١} = \text{نها}_{ص \to ١} \frac{(ص^{٢} - ١)(ص^{٢} + ١)}{(ص - ١)(ص^{٢} + ص + ١)}$$

$$= \text{نها}_{ص \to ١} \frac{(ص - ١)(ص + ١)(ص^{٢} + ١)}{(ص - ١)(ص^{٢} + ص + ١)} = \frac{(١ + ١)(١^{٢} + ١)}{١^{٢} + ١ + ١}$$

$$= \frac{(٢)(٢)}{٣} = \frac{٤}{٣}$$

فالطريقة الخامسة هي الفرض عندما تكون أدلة الجذور أكبر من ٢ أو عددها أكثر من جذر واحد ومختلفة الدليل كوجود الجذر التربيعي في البسط والتكعيبي في المقام أو العكس.

ملحوظة:

وبإيجاز شديد للتذكير نقول:

للتخلص من الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ الناتجة من التعويض المباشر عند إيجاد نهاية الاقتران النسبي نستخدم طرقاً هي:

- التحليل إلى العوامل
- توحيد المقامات
- انطاق البسط أو المقام أو لكيهما
- القسمة الطويلة أو التركيبية

- تبديل س بمتغير آخر مثل ص مرفوعاً لأس يساوي حاصل ضرب دليلي الجذرين عندما تكون الأدلة أكبر من ٢.

(نظرية ٩): نهاية الاقترانات الدائرية (المثلثية)

تسمى كل من اقترانات الجيب وجيب التمام والظل وظل التمام والقاطع وقاطع التمام بالاقترانات الدائرية لأنها تعرّف من استخدام دائرة الوحدة. هذا معروف سابقاً.

لكل ∀ س حيث $\cdot \leq$ س $\leq ٢\pi$

ويمكن إيجاد نهاية كل من الاقترانات الدائرية بواسطة التعويض المباشر هكذا: لكل أ ∈ ح فإن:

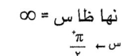
نها جا س = جا أ ومثاله نها جا س = جا $\frac{\pi}{٤}$ = ١
(س ← أ) (س ← $\frac{\pi}{٤}$)

نها جتا س = جتا أ ومثاله نها جتا س = جتا $\frac{\pi}{٤}$ = صفر
(س ← أ) (س ← $\frac{\pi}{٤}$)

نها ظاس = ظا أ حيث أ ∈ ح − { ± $\frac{ن}{٤}$ π : ن = ١، ٣، ٥، ... }
(س ← أ)

ومثاله نها ظا س = ظا $\frac{\pi}{٣}$ = $\sqrt{٣}$
(س ← $\frac{\pi}{٣}$)

ومن الشكل المجاور



نها ظا س = ∞
(س ← $\frac{\pi}{٢}^{+}$)

نها ظا س = − ∞
(س ← $\frac{\pi}{٢}^{-}$)

∴ نها ظا س غير موجودة
(س ← $\frac{\pi}{٢}$)

ص = ق(س) = ظا س
∞
من اليسار
س
٢
∞ -

أي أن نها ظا س = غير موجودة
(س ← $\frac{\pi}{٢}$)

وسنبين في هذا البند النظرية الآتية لإيجاد نهاية بعض الاقترانات الدائرية

لتكن ∢ س زاوية مقاسها بالراديان Radian

فإن $\underset{\text{س} \leftarrow \text{صفر}}{\text{نها}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = 1$ مهما كان قياس الزاوية

أي أن بشكل عام: $\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا أ س}}{\text{أ س}} = 1$

ومثاله $\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا ٥ س}}{\text{٥ س}} = 1$

وبما أن استخدام هذه النظرية أكثر أهمية من طريقة إثباتها كونها تستخدم في إيجاد نهاية الاقترانات الدائرية الأخرى والتي يجب أن نظهر فيها $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ كمايلي:

⇦مثال: أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا ٥ س}}{\text{س}}$

دائماً نفرض الزاوية هـ = ٥ س ← س = $\frac{\text{هـ}}{5}$

وعندما س ← ٠ فإن هـ ← ٠ أيضاً

ومنها $\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا ٥ س}}{\text{س}} = \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا هـ}}{\frac{\text{هـ}}{5}}$

$= \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا هـ}}{\frac{1}{5} \times \text{هـ}} = \frac{1}{\frac{1}{5}} \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا هـ}}{\text{هـ}}$

$= 5 \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا هـ}}{\text{هـ}} = 5 \times 1 = 5$

ويمكن إيجاد النهاية مباشرة بأنها معامل الزاوية س بالبسط على معامل الزاوية س بالمقام.

⇦مثال: أوجد $\underset{س \to ٠}{نها} \frac{جا ٣ س}{٤ س} = \frac{٣}{٤}$ مباشرة

أو بفرض ٣ س = هـ ونجد ٤ س بدلالة هـ

هكذا: $\underset{هـ \to ٠}{نها} \frac{جا هـ}{\frac{٤ هـ}{٣}} = \frac{٣}{٤} \underset{هـ \to ٠}{نها} \frac{جا هـ}{هـ} = \frac{٣}{٤}$

وبشكل عام:

$\underset{س \to ٠}{نها} \frac{جا أ س}{ب س} = \frac{أ}{ب}$ وجميع الحالات تفرض الزاوية في البسط = هـ وتكمل.

ومن النظرية $نها \frac{جاس}{س} = صفر$

نستطيع إيجاد $\underset{س \to ٠}{نها} \frac{ظاس}{س}$ كما يلي

بما أن $ظا س = \frac{جا س}{جتا س}$

فإن $\underset{س \to ٠}{نها} \frac{ظاس}{س} = \underset{س \to ٠}{نها} \frac{\frac{جا س}{جتا س}}{\frac{س}{١}} = \underset{س \to ٠}{نها} \frac{جا س}{جتا س} \times \frac{١}{س}$

$= \underset{س \to ٠}{نها} \frac{جاس}{س} \times \underset{س \to ٠}{نها} \frac{١}{جتا س} = ١ \times \frac{١}{جتا صفر} = ١ \times \frac{١}{١} = ١$

أي أن:

$\underset{س \to ٠}{نها} \frac{جاس}{س} = ١$ وكذلك $\underset{س \to ٠}{نها} \frac{ظاس}{س} = ١$ أيضاً

وللاستفادة من النظرية السابقة بشقيها يجب الإحاطة التالية بمعرفة العلاقات بين الاقترانات الدائرية وتحويلها جميعاً إلى اقتراني «الجيب والظل» إذا أمكن لأنهما هما صلب النظريتين ثم استخدام المتطابقات المثلثية التالية:

جا^{2}س + جتا^{2}س = ١ ، جتا٢س = جتا^{2}س - جا^{2}س

= ٢ جتا^{2}س - ١

= ١ - ٢ جا^{2}س

وغيرها من المتطابقات المثلثية الأخرى.

⇦مثال: أوجد نها$_{س \leftarrow أ}$ $\frac{\text{جا س} - \text{جا أ}}{\text{س} - \text{أ}}$ بعد تحويل الفرق إلى حاصل ضرب هكذا:

= نها$_{س \leftarrow أ}$ $\frac{٢\text{جتا} \frac{\text{س} + \text{أ}}{٢} \text{ جا} \frac{\text{س} - \text{أ}}{٢}}{\text{س} - \text{أ}}$ وللحصول على $\frac{\text{جا هـ}}{\text{هـ}}$ فإننا نفرض

$\frac{\text{س} - \text{أ}}{٢}$ = هـ ومنها س − أ = ٢ هـ

+ ٢ أ + ٢ أ

أي أن س + أ = ٢ أ + ٢ هـ

ومن نها$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{٢\text{جتا} \frac{٢\text{أ} + ٢\text{هـ}}{٢} \text{ جا} \frac{٢\text{ هـ}}{٢}}{٢\text{ هـ}}$ = نها$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{جتا (أ + هـ) جا هـ}}{\text{هـ}}$

= نها$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{جا هـ}}{\text{هـ}}$ × نها$_{هـ \leftarrow ٠}$ جتا (أ + هـ) = ١ × جتا أ = جتا أ

⇦مثال: أوجد نها$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}^2}$

بانطاق البسط نها$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}^2}$ × $\frac{١ + \text{جتا س}}{١ + \text{جتا س}}$

= نها$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}^2}$ = نها$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{س}^2 (١ + \text{جتاس})}$

$$= \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا\,س}{س} \times \frac{جا\,س}{س} \times \frac{١}{١ + جتا\,س} \right)$$

$$= ١ \times ١ \times \frac{١}{١ + جتا\,صفر} = ١ \times ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

⇦مثال: أوجد $\lim_{س \to ٠}$ ظا٣س قتا٥س

الحل: باستبدال قتا٥س بما يساويها من الاقتران الجيب هكذا

$$\lim_{س \to ٠} ظا٣س \times \frac{١}{جا٥س} = \lim_{س \to ٠} \frac{ظا٣س}{جا٥س} = \frac{\lim_{س \to ٠} \frac{ظا٣س}{س}}{\lim_{س \to ٠} \frac{جا٥س}{س}} = \frac{٣}{٥}$$

⇦مثال: أوجد $\lim_{س \to ٠} \frac{جا\,(ظا\,س)}{س}$

الحل: نضرب البسط والمقام في $\frac{ظاس}{ظاس}$ هكذا وكأنه أصبح:

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جا\,(ظا\,س)}{س} \times \frac{ظاس}{ظاس}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جا\,(ظا\,س)}{ظاس} \times \lim_{س \to ٠} \frac{ظاس}{س}$$ (مع شيئ من التبديل والترتيب)

$$= (١)\,(١) = ١$$

(نظرية ١٠): نظرية الشطيرة:

عندما لا نستطيع لسبب من الأسباب إيجاد نهاية بعض الاقترانات بشكل مباشر فإننا نحصره بين اقترانين كما يلي:

ك(س) $\leq$ ق(س) $\leq$ ل(س) لجميع قيم س في فترة مفتوحة تحتوي العدد أو تحتويه (كلاهما صواب).

فإذا كانت:

$\lim_{س \to أ}$ ك(س) = $\lim_{س \to أ}$ ل(س) = م مثلاً (الأطراف)

فإن $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = م نفسه (الوسط بينهما)

وإذا كانت $\lim_{س \to أ}$ ك (س) $\neq$ $\lim_{س \to أ}$ ل (س)

فإن $\lim_{س \to أ}$ ق (س) غير موجودة

كما في الأمثلة التالية:

⇦مثال١: إذا كان (س^{٢} + ١٢س − ٩) $\leq$ ق(س) $\leq$ (٥س^{٢})

أوجد $\lim_{س \to \frac{٣}{٢}}$ ق(س)

الحل: لا تستطيع التعويض لأن قاعدة ق(س) غير معلومة لذا

فإننا نجد:

$\lim_{س \to \frac{٣}{٢}}$ (س^{٢} + ١٢س − ٩) = $(\frac{٣}{٢})^{٢}$ + ١٢ $(\frac{٣}{٢})$ − ٩

= $\frac{٩}{٤}$ + ١٨ − ٩ = $\frac{٩}{٤}$ + $\frac{٩}{١}$ = $\frac{٩ + ٣٦}{٤}$ = $\frac{٤٥}{٤}$

وكذلك $\lim_{س \to \frac{٣}{٢}}$ ٥س^{٢} = ٥$(\frac{٣}{٢})^{٢}$ = ٥ $(\frac{٩}{٤})$ = $\frac{٤٥}{٤}$

وبما أن $\lim_{س \to \frac{٣}{٢}}$ (س^{٢} + ١٢س − ٩) = $\lim_{س \to \frac{٣}{٢}}$ ٥س^{٢} = $\frac{٤٥}{٤}$ (الأطراف)

فإن نهاية الاقتران الوسط بينهما :

أي $\lim_{س \to \frac{٣}{٢}}$ ق(س) = $\frac{٤٥}{٤}$

مثال٢ : أوجد $\lim_{س \to ٠}$ س جا $\frac{١}{س}$

بما أن $-١ \leq$ جا $\frac{١}{س} \leq ١$ { مدى اقتران الجيب ∋ [-١ ، ١]

وضرب الأطراف الثلاثة بقيمة المتغير س هكذا.

$-$ س $\leq$ س جا $\frac{١}{س} \leq$ س

والآن $\lim_{س \to ٠}$ $-$ س = صفر

$\lim_{س \to ٠}$ س = صفر

∴ $\lim_{س \to ٠}$ س جا $\frac{١}{س}$ = صفر

مثال٣ : أوجد $\lim_{س \to ٠}$ س جتا $\frac{١}{س}$

نستخدم نظرية الشطيرة هكذا :

بما أن $-١ \leq$ جتا $\frac{١}{س} \leq ١$ كون مدى اقتران جيب التمام ∋ [-١ ، ١]

وبما أن $\lim_{س \to ٠}$ -١ = -١ كون نهاية الثابت = نفسه

وكذلك $\lim_{س \to ٠}$ ١ = ١ كون نهاية الثابت = نفسه

بما أن $\lim_{س \to ٠}$ $-١ \neq \lim_{س \to ٠}$ ١

فإن $\lim_{س \to ٠}$ جتا $\frac{١}{س}$ غير موجودة

(٢٠ – ٣) الاتصال Continuity

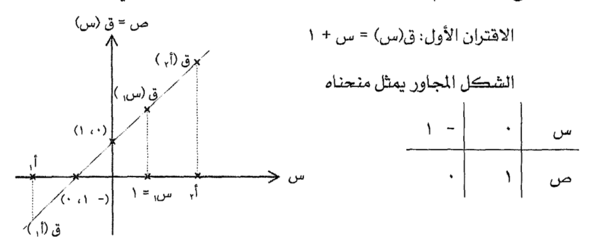
مبدئياً وقبل الخوض بمناقشة مفهوم الاتصال رياضياً، يمكن أن يُقال أن الاقتران المتصل هو الذي يتكون منحناه من خط بياني واحد بلا انقطاع، وأما التفسير والتوضيح فإنه ينطلق من مفهوم الاتصال كما يلي:

وأما مفهوم الاتصال رياضياً فإنه يرتبط بالنهايات والقيمة ارتباطاً وثيقاً، ولتوضيح هذا المفهوم يجب مناقشة الاقترانات الثلاثة الآتية كما يلي:

الاقتران الأول: ق(س) = س + ١

الشكل المجاور يمثل منحناه

س	٠	-١
ص	١	٠



فإذا وضعت رأس القلم لترسم منحنى الاقتران – عند النقطة ق ($أ_1$) وسرت به للأعلى باتجاه ق ($أ_2$) مروراً بـ ق ($س_1$) دون أن ترفع رأس القلم عن الورقة لأي سبب من الأسباب.

عندها يسمى الاقتران ق (س) = س + ١ اقتراناً متصلاً عند $س_1$ حيث $س_1$ $\in$ ($أ_1$، $أ_2$) لأن منحنى الاقتران في هذه الفترة قطعة واحدة بلا انقطاع كما هو واضح بالشكل ولما كانت $س_1$ = ١ فإن ق(س) متصل عند س = ١.

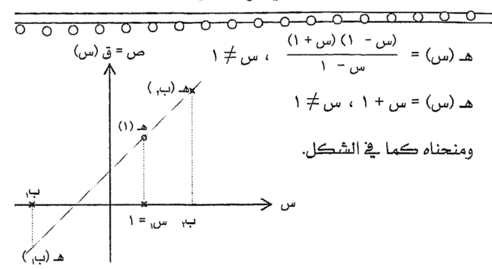
الاقران الثاني: هـ (س) = $\frac{س^2 - 1}{س - 1}$ ، س $\neq$ ١

وبعد تبسيطه بالتحليل يصبح كما يلي:

هـ (س) = $\frac{(س - ١)(س + ١)}{س - ١}$ ، س ≠ ١

هـ (س) = س + ١ ، س ≠ ١

ومنحناه كما في الشكل.

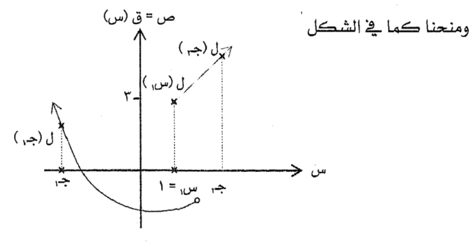


فإذا وضعت رأس القلم عند النقطة هـ (ب١) – لرسم منحنى الاقتران – وسرت به للأعلى باتجاه هـ (ب٢) فإنك لن تصل هـ (ب٢) دون ان ترفع رأس القلم عند هـ (س١) كون هـ (س) غير معرف عند س = س١ وليس للاقتران قيمة عند س١.

ولما كانت س١ = ١ فإن هـ (س) غير متصل عند س = ١ لأنه ليس قطعة واحدة كما هو واضح بل مقطوع عند هـ (١) لذا وضعت دائرة (غير مظللة)

الاقتران الثالث: ل (س) = { ٢س + ١، س ≥ ١ ؛ س٢ - ٣، س < ١ }

ومنحنا كما في الشكل



فإذا وضعت رأس القلم عند النقطة ل (جـ١) – لرسم منحنى الاقتران – وسرت به للأسفل باتجاه ل (جـ٢) فإنك لن تصل إلى ل (جـ٢) دون أن ترفع رأس القلم

عند ل ($س_1$) علماً بأن ل ($س_1$) = ٣

لأنه من الواضح أن منحنى ل (س) قطعتان

أي أن ل (س) معرف عند $س_1$= ١ ولكن $\lim_{س \to 1}$ ل (س) غير موجودة.

لأن $\lim_{س \to 1^+}$ ل (س) = ٢ + ١ = ٣ من اليمين

وكذلك $\lim_{س \to 1^-}$ ل (س) = $(1)^2 - 3 = -2$ من اليسار

ولربط الاتصال بالقيمة والنهايات:

دونك الملاحظات التالية والتي يمكن تدوينها على منحنيات الاقترانات الثلاثة معاً.

(١) منحنى ق(س) = س + ١ خط بياني واحد.

ق(١) = ١ + ١ = ٢

$\lim_{س \to 1}$ ق(س) = ١ + ١ = ٢

أي أن النهاية = القيمة عند $س_1$ = ١

أي ق ($س_1$) = $\lim_{س \to س_1}$ ق (س) $\xleftarrow{\text{أي ق(س):}}$ متصل عند ($س_1$= ١)

(٢) منحنى هـ (س) = $\frac{س^2 - 1}{س - 1}$ ، س $\neq$ ١ ، ليس خط بياني واحد بل اثنان (نتيجة لوجود نقطة عدم الاتصال)

هـ (١) = $\frac{(1)^2 - 1}{1 - 1}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ = وكون المقام صفر فالاقتران غير معرف عند $س_1$ = ١

نها هـ(س) وبعد الاختصار = نها هـ (س) = نها (س + ١) = ١ + ١ = ٢
س ← ١   س ← ١   س ← ١

فالقيمة ≠ النهاية كون القيمة غير موجودة لأن الاقتران عند $س_١$ = ١ غير معرف

أي هـ (س) غير متصل عند ($س_١$ = ١)

(٣) منحنى ل (س) = { ٢س + ١ ، س ≥ ١ ؛ $س^٢$ - ٣ ، س < ١ } ليس خط بياني واحد بل اثنان (نتيجة لوجود نقطة عدم اتصال)

ل (١) = ٢ (١) + ١ = ٣

نها ل (س) من اليمين واليسار
س ← ١

نها ل (س) = ٢ (١) + ١ = ٣
س ← ١^+

نها ل (س) = $(١)^٢$ + ١ = ٣
س ← ١^-

بما أن نها ل (س) ≠ نها ل (س)
س ← ١^+ س ← ١^-

∴ نها ل (س) غير موجودة
س ← ١

أي ل (س) غير متصل عند ($س_١$ = ١)

والآن نوجز النقاش السابق بتعريف الاتصال رياضياً على نقطة كما يلي:

ليكون ق(س) اقتران متصل عند س = أ يجب أن تتحقق الشروط الثلاثة الآتية معاً.

أولاً: ق(س) معرف عند س = أ أي أن ق (أ) عدد حقيقي.

ثانياً: نها ق(س) موجودة
س ← أ

ثالثاً: نها ق(س) = ق(أ)
س ← أ

وبإيجاز شديد لكنه مفيد:

ق (س) متصل عند س = أ، عندما يكون للاقتران قيمة عند س = أ، (مُعّرف) ونهايته موجودة ثم القيمة = النهاية عند س = أ.

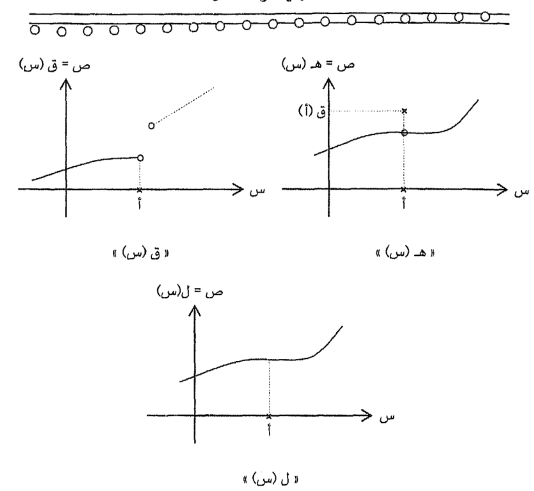
وإذا لم يتحقق شرط من هذه الشروط الثلاثة فالاقتران ق(س) غير متصل عند س = أ، عندها تسمى النقطة أ عدم اتصال أو نقطة انفصال.

وإذا كان ق(س) متصل عند كل نقطة من نقط الفترة [أ، ب] فإننا نقول أن ق(س) متصل على الفترة [أ، ب].

وإذا كان ق (س) متصل على الفترة (- ∞، ∞) فإننا نقول أن ق(س) متصل على ح أو ق(س) متصل.

ولا تنس أن كثيرات الحدود جميعها متصلة على ح لأن ق(أ) = نها ق(س)
س ← أ
دائماً لكن أ $\ni$ ح لأن إيجادها (القيمة والنهاية) يتم بطريقة واحدة هي التعويض المباشر فكيف بهما لا يتساويان؟ إلا إذا عرفت كثيرات الحدود بطريقة خاصة ومغايرة للمألوف.

⇦مثال: اعتماداً على أشكال منحنيات الاقترانات الثلاثة التالية ق(س)، هـ(س)، ل(س)



بين لماذا ؟

(١) ق (س) غير متصل عند س = أ

الجواب: لأن ق (س) غير معرف عند س = أ

وكذلك نها ق(س) غير موجودة لاختلافها من اليمين واليسار (لم تحقق
س ← أ
الشروط الثلاثة معاً)

(٢) هـ (س) غير متصل عند س = أ

الجواب: لأن ق(س) معرف عند س = أ

ولأن نها ق(س) موجودة
س ← أ

لكن ق (أ) $\neq$ نها ق(س) (لم تتحقق الشروط الثلاثة معاً)
س ← أ

(٣) ل(س) متصل عند س = أ

الجواب: لأن ق(س) معرف عند س = أ

ولأن نها ق(س) موجودة
س ← أ

ثم ق (أ) = نها ق (س)
س ← أ

«كون الاتصال يتطلب الشروط الثلاثة معاً»

«وتحققت هذه في الاقتران ل (س)»

⇦مثال: ابحث في اتصال ق(س) = س^{٢} + ٥ س - ١ عند س$_{١}$ = ٥

القيمة: ق(٥) = ٥^{٢} + ٥(٥) - ١ = ٤٩

النهاية: نها (س^{٢} + ٥س - ١) = ٥^{٢} + ٥(٥) - ١ = ٤٩
س ← ٥

وبما أن ق(٥) = نها ق(س)
س ← ٥

فالاقتران متصل عند س = ٥

ليس هذا فحسب بل أنه متصل على ح كونه كثير حدود.

⇦مثال: ابحث في اتصال ق(س) = { س + ٢ ، س ≤ ٢ القاعدة الأولى
٢ - ٢س، س > ٢ القاعدة الثانية

عند س = ٢

القيمة ق (٢) = ٢ + ٢ = ٤ كوننا عوضنا في القاعدة الأولى للتعريف أن

النهاية: من اليمين واليسار:

نها ق(س) :
س ← ٢

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = نها (س + ٢) = ٢ + ٢ = ٤

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = نها (٢ - ٢س) = ٢ - ٢(٢) = - ٢

وبما أن نها ق (س) ≠ نها ق (س)
(س ← ٢⁺ ، س ← ٢⁻)

فإن نها ق(س) غير موجودة
(س ← ٢)

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٢

⇦مثال: ابحث في اتصال ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - س - ١٢}{س - ٤} & ، س \neq ٤ \\ ٥ & ، س = ٤ \end{cases}$

عند س = ٤

القيمة: ق(٤) = ٥

النهاية: نها ق (س) = $\frac{(س - ٤)(س + ٣)}{س - ٤}$ = نها (س + ٣) ٤ + ٣ = ٧
(س ← ٤)

وبما أن القيمة ≠ النهاية في الاقتران غير متصل عند س = ٤

والجدير بالذكر أنه يمكن إعادة تعريف الاقتران الغير متصل بسبب أن القيمة ≠ النهاية لجعله متصلاً بأن نجعل القيمة = النهاية كونه معرف عند $س_١$ = أ، ونهايته موجودة أيضاً.

فالاقتران ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - س - ١٢}{س - ٤} & ، س \neq ٤ \\ ٥ & ، س = ٤ \end{cases}$

الغير متصل عند س = ٤

يمكن إعادة تعريفه ليصبح متصلاً عند س = ٤ هكذا

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^2 - س - ١٢}{س - ٤} & ، س \neq ٤ \\ ٧ & ، س = ٤ \end{cases}$$

عندها يصبح الاقتران متصل كون القيمة ق(٤)= ٧ = النهاية $\lim_{س \to ٤}$ ق (س) = ٧

(من اليمين واليسار)

ونستمر بمناقشة الاتصال لنعرفه على فترة مثل [أ ، ب]

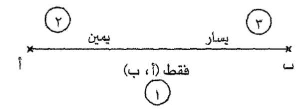
يكون ق(س) متصل على الفترة [أ ، ب] إذا كان متصلاً:

«١» عند كل نقطة من نقط الفترحة (أ ، ب)

«٢» وعلى يمين أ أي أن $\lim_{س \to أ^+}$ ق (س) = ق(أ)

«٣» وعلى يسار ب أي أن $\lim_{س \to ب^-}$ ق(س) = ق(ب)

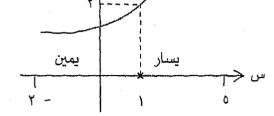
كما في الشكل:



مثال: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^2 + ١ & ، -٢ \leq س < ١ \\ ٢س & ، ١ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

أبحث في اتصاله على [- ٢ ، ٥]

منحناه كما في الشكل



أولاً: نبحث في اتصاله على الفترة (−٢ ، ٥) المفتوحة.

متصل عندما س < ١ لأن (س^{٢} + ١) كثير حدود تربيعي

ومتصل عندما س > ١ لأن (٢س) كثير حدود خطي

ثم متصل عند س = ١ لأن ق(١) = ١^{٢} + ١ = ٢

ولأن نها$_{\text{س} \to ١^{+}}$ ق(س) = نها$_{\text{س} \to ١^{-}}$ ق (س) لأن ١^{٢} + ١ = ٢(١) أي ٢ = ٢

∴ ق(س) متصل على الفترة (−٢ ، ٥) المفتوحة.

ثانياً: نبحث في اتصاله على يمين −٢ هكذا

متصل على يمين −٢ لأنه كثير حدود أو لأن نها$_{\text{س} \to -٢^{+}}$ ٢س = ق(−٢)

أي ٢ (−٢) = ٢ (−٢) = −٤

ثالثاً: وبأسلوب مماثل متصل على يسار ٥ لأنه كثير حدود

أو لأن نها$_{\text{س} \to ٥^{-}}$ س^{٢} + ١ = ٥^{٢} + ١ = ٢٦

وكذلك ق(٥) = ٥^{٢} + ١ = ٢٦

وللاختصار نبحث في اتصاله عند نقطة التغيير بالتعريف فقط.

وإتماماً لمفهوم الاتصال هناك معلومات يجب التركيز عليها لأهميتها في الاتصال ولتكرارها باستمرار وهي:

(١) كثيرات الحدود جميعها متصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية إلا إذا عرفت بطريقة مغايرة.

(٢) الاقترانات النسبية التي ليس لمقاماتها أصفار حقيقية مثل ق(س) = $\frac{س}{س^2 + ١}$
متصلة على ح كون مجالها ح وليس لمقاماتها أصفار حقيقية لأن $س^2 + ١$ = صفر

$س^2 = -١$ وهذا مُستحيل في ح لأن ($س^2 + ١$) دائماً موجب.

وأما نقط عدم الاتصال بشكل عام فإنها تتمثل بالحالات التالية:

أولاً: أصفار مقام الاقتران النسبي ومثاله:

ق (س) = $\frac{س^2 + ١}{س^2 - ١}$ غير متصل عند س = {- ١، ١}

لأن {- ١، ١} ليست في مجاله كون مجاله: ح − {- ١، ١}

ثانياً: النقط التي تجعل اقتران أكبر عدد صحيح لأنها نقط يقفز عندها المنحنى من درجة لأخرى ومثاله.

ق (س) = ⟦ س ⟧ غير متصل عندما س ∋ ص الأعداد الصحيحة ← {٠، ± ١، ± ٢، ...}

هـ (س) = ⟦ ٢ س ⟧ غير متصل عندما س ∋ $\frac{١}{٢}$ ص حيث ص عدد صحيح
لأن طول الدرجة = $\frac{١}{٢}$ ← {٠، ± $\frac{١}{٢}$ ، ± ١، ± $\frac{٣}{٢}$، ±٢ ...}

ل (س) = ⟦ $\frac{١}{٢}$ س ⟧ غير متصل عندما س ∋ ٢ ص حيث ص عدد صحيح
لأن طول الدرجة = ٢ ← {٠، ± ٢، ± ٤، ± ٦ ...}

ثالثاً: نقط الاطراف للاقتران المحدود حيث النهاية هناك (في الأطراف) غير موجودة ومثاله ق (س) = س معرف على [٢، ٣] وغير متصل عند س ٢، ٣ لأن النهاية عند س = ٢، ٣ غير موجودة.

⇦مثال: ابحث في اتصال ق(س): $\sqrt{س^2 + ١}$ عند س = - ١

مجال ق(س) = $س^2 + 1 \geq$ صفر

وحتى نجد أصفاره: $س^2 + 1$ = صفر

$س^2 = -1$ وهذا مستحيل في ح أي ليس له أصفار حقيقية

$ق(-1) = \sqrt{(-1)^2 + 1} = \sqrt{2}$

$\underset{س \leftarrow -1}{نها} ق(س) = ق(-1) = \sqrt{(-1)^2 + 1} = \sqrt{2}$ تعويضاً مباشراً

∴ ق (س) متصل عند س = - ١

⇦مثال: إذا كان ق (س) = $\begin{cases} 3\ جتاس ، & -\frac{\pi}{6} \leq س \leq 0 \\ \frac{ظا\ 3س}{س} ، & 0 < س \leq \frac{\pi}{6} \end{cases}$

ابحث في اتصاله في الفترة $[-\frac{\pi}{6} ، \frac{\pi}{6}]$

نبحث في اتصاله عند س = ٠ لأنها داخل الفترة $(-\frac{\pi}{6} ، \frac{\pi}{6})$

ق (٠) = ٣ جتا صفر = ٣ (١) = ٣

$\underset{س \leftarrow 0}{نها} ق(س) =$

$\underset{س \leftarrow 0^+}{نها} ق(س) = \underset{س \leftarrow 0}{نها} \frac{ظا\ 3س}{س} = 3$ { تطبيقاً على النظرية نها $\frac{ظا\ 3س}{س} = 1$

$\underset{س \leftarrow 0^-}{نها} ق(س) = \underset{س \leftarrow 0}{نها}$ ٣ جتا س = ٣ جتا صفر = ٣ (١) = ٣ تعويض مباشر.

وبما أن القيمة = النهاية عند س = صفر

عندها

يمين يسار

$-\frac{\pi}{6}$ ٠ $\frac{\pi}{6}$

فهو متصل عند س = صفر

ونبحث في اتصاله على يمين ($-\frac{\pi}{6}$)

هكذا:

ق ($-\frac{\pi}{6}$) = ٣ جتا ($-\frac{\pi}{6}$) = ٣ جتا ($\frac{\pi}{6}$) كون جتا (- س) = جتاس

$= ٣ (\frac{\sqrt{٣}}{٢}) = \frac{٣}{٢}\sqrt{٣}$

والنهاية على يمين ($-\frac{\pi}{6}$) نجدها بالتعويض أيضاً وتعطي نفس القيمة $\frac{٣}{٢}\sqrt{٣}$

فهو متصل على يمين ($-\frac{\pi}{6}$)

ونبحث في اتصاله على يسار ($\frac{\pi}{6}$)

∴ ق (س) متصل في الفترة [$-\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{6}$]

وكون الاقتران مثلثي يكفي أن نبحث في اتصاله عند س = صفر ليكون متصلاً على الفترة [$-\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{6}$] لأنه متصل مثل كثيرات الحدود.

ملحوظة:

اقترانات الجيب وجيب التمام الدائرية متصلة على ح مثل كثيرات الحدود تماماً.

مثال: أوجد نقط عدم الاتصال (الانفصال) للاقتران

ق (س) = $\frac{س}{س^٢ - ٣س + ٢}$

الحل: بما أن الاقتران النسبي غير متصل عند أصفار مقامه الحقيقية فإننا نجد أصفار المقام هكذا:

$س^٢ - ٣س + ٢$ = صفر (نصفر المقام)

(س - ٢) (س - ١) = صفر ثم نحلله

س = ١ ، ٢

∴ نقط عدم الاتصال هي عندما س = ١ ، س = ٢

فيصبح ق (س) غير متصل عند س = ١، س = ٢

(٢٠ – ٤) نظريات في الاتصال:

سنورد فيما يلي نظريات في الاتصال، والتي تنتج بشكل مباشر عن نظريات النهايات والحقيقة إن شئت الصواب ما هذه النظريات إلا حالات خاصة من نظريات النهايات وكما يلي:

نبدأ بهذا السؤال: ليكن ق(س)، هـ (س) اقترانين متصلان عند س = أ، فماذا بشأن اتصال كل من ؟

(١) (ق + هـ) (س)، عند جمع اقترانين أو أكثر.

(٢) (ق – هـ) (س)، عند طرح اقترانين أو أكثر.

(٣) (ق . هـ) (س)، عند ضرب اقترانين أو أكثر.

(٤) (ق ÷ هـ) (س)، عند قسمة اقترانين أو أكثر.

(٥) (ق ∘ هـ) (س)، عند تركيب اقترانين أو أكثر شرط هـ(أ) $\neq$ صفر

(٦) | ق(س) | ، | هـ (س) | ؛ القيمة المطلقة للاقتران المتصل.

(٧) $\sqrt[ن]{ق(س)}$ ، $\sqrt[ن]{هـ(س)}$ ، جذر الاقتران المتصل لكن ن $\geq$ ٢ وعدد طبيعي لأن دليل الجذر دائماً موجب.

ثم نجيب عنه كما في المثال:

⇦مثال: إذا كان ق (س) = س متصل لأنه كثير حدود وعند س = ١ متصل أيضاً هـ (س) = $\frac{س^{٢}}{س + ١}$ ، س $\neq$ - ١ متصل عند س = ١

والأجوبة تكون:

(١) $(\text{ق} + \text{هـ})(\text{س}) = \frac{\text{س}}{١} + \frac{\text{س}^٢}{\text{س} + ١} = \frac{\text{س}^٢ + \text{س} + \text{س}^٢}{\text{س} + ١} = \frac{٢\text{س}^٢ + \text{س}}{\text{س} + ١}$ ، $\text{س} \neq -١$

فهو متصل عند س = ١

(٢) $(\text{ق} - \text{هـ})(\text{س}) = \frac{\text{س}}{١} - \frac{\text{س}^٢}{\text{س} + ١} = \frac{\text{س}^٢ + \text{س} - \text{س}^٢}{\text{س} + ١} = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١}$ ، $\text{س} \neq -١$ فهو متصل عند س = ١

(٣) $(\text{ق} \,.\, \text{هـ})(\text{س}) = \left(\frac{\text{س}}{١}\right)\left(\frac{\text{س}^٢}{\text{س} + ١}\right) = \frac{\text{س}^٢}{\text{س} + ١}$ ، $\text{س} \neq -١$ فهو متصل عند س = ١

(٤) $(\text{ق} \div \text{هـ})(\text{س}) = \frac{\text{س}}{١} \div \frac{\text{س}^٢}{\text{س} + ١} = \frac{\text{س}}{١} \times \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^٢} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq \{-١ ، ٠\}$ فهو متصل عند س = ١ شرط أن س $\neq$ صفر

(٥) $(\text{ق} \circ \text{هـ})(\text{س}) = \text{ق}\left(\frac{\text{س}^٢}{\text{س} + ١}\right) = \frac{\text{س}^٢}{\text{س} + ١}$ ، $\text{س} \neq -١$ فهو متصل عند س = ١

(٦) $|\text{ق}(\text{س})| = |\text{س}| = \begin{cases} -\text{س} ، & -\text{س} ، \text{س} < ٠ \\ \text{س} ، & \text{س} ، \text{س} \geq ٠ \end{cases}$

وعندما س = ١ فإن ق (١) = ١

$\lim_{\text{س} \to ١} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ١} \text{س} = ١$ فهو متصل

وكذلك $\left|\frac{\text{س}^٢}{\text{س} + ١}\right|$ متصل عند س = ١ لأن س $\neq -١$

(٧) $\sqrt[٢]{\text{ق}(\text{س})} = \sqrt[٢]{\text{س}}$ متصل عند س = ١ لأن ١ موجب والقيمة والنهاية نعوض العدد ١

وكذلك $\sqrt[ن]{\text{هـ (س)}} = \sqrt{\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} + ١}}$ متصل عند س = ١

والآن ندون منطوق نظريات الاتصال بما يلي:

من النظريات السابقة مع شيء من التحفظ كما سيظهر في خلال السياق.

«لأي اقترانين ق (س) ، هـ (س) المتصلين عند س = أ»

فإن:

ق (س) + هـ (س) = (ق + هـ) (س) متصل عند س = أ

وأن: ق (س) − هـ (س) = (ق − هـ) (س) متصل عند س = أ

وأن: جـ . ق (س)، جـ . هـ (س) متصلان عند س = أ حيث جـ عدد حقيقي

وأن: ق (س) . هـ (س) = (ق . هـ) (س) متصل عند س = أ

وأن: $\frac{\text{ق (س)}}{\text{هـ (س)}} = \left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)$ (س) متصل عند س = أ شرط أن ق (أ) $\neq$ صفر

وكذلك هـ (أ) $\neq$ صفر

وأن: (ق ∘ هـ) (س)، (هـ ∘ ق) (س) متصلان عند س = أ

وأن: | ق(س) | | هـ(س) | متصلان عند س = أ

وأخيراً $\sqrt[ن]{\text{ق (س)}}$ ، $\sqrt[ن]{\text{هـ (س)}}$ متصلان عند س = أ حيث ن عدد طبيعي $\geq$ ٢ و ق(س) ، و هـ (س) موجبان عندما ن زوجية فقط.

ولكن التحفظ الذي نوهنا عنه يكمن في أن عكس النظريات السابقة ليس دائماً صواب وإليك الأمثلة للتوضيح:

⇦مثال: من المعلوم أن ق (س) = ⟦ س + ٣ ⟧ غير متصل عند س = ٣

(كونه اقتران أكبر عدد صحيح يقفز عند الأعداد الصحيحة، فهي فقط عدم اتصال)

وكذلك هـ (س) = ⟦ ٣ − س ⟧ غير متصل عند س = ٣

لكن ق(س) + هـ (س) = (ق + هـ) (س) متصل عند س = ٣

لأن (ق + هـ) (س) = ⟦ س + ٣ ⟧ + ⟦ ٣ − س ⟧ = ⟦ س + ٣ + ٣ − س ⟧

= ⟦ ٦ ⟧ = ٦ وهذا اقتران ثابت فهو متصل على ح.

فالاقترانين ق (س) ، هـ (س) غير متصلين عند س = ٣ لكن حاصل جمعهما متصل عند س = ٣

وبشكل عام ق (س) = ⟦ س + أ ⟧، هـ (س) = ⟦ أ − س ⟧ غير متصلين عند أ ∋ ح لكن (ق + هـ) (س) متصل.

⇦مثال: وعند القسمة أيضاً:

من المعلوم أن ق(س) = س − $\frac{١}{س}$ ، س ≠ صفر غير متصل عند س = صفر

و هـ (س) = س + $\frac{١}{س}$ ، س ≠ صفر غير متصل عند س = صفر

لكن ل (ق) = $\frac{ق (س)}{هـ (س)}$ = $\frac{س - \frac{١}{س}}{س + \frac{١}{س}}$ = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ١}$ متصل عند س = صفر

لأن أصفار الاقتران غيرحقيقية.

لذلك فالحاصل ذاك ليس تناقض وإنما ناتج من أن عكس النظريات ليس صواب دائماً.

⇦مثال: إذا كان ق (س) = ٢س + ١، هـ (س) = | س − ٢ | ابحث في

اتصال(ق . هـ) (س) عند س = ٢

ق (س) متصل عند س = ٢ كونه كثير حدود

هـ (س) متصل عند س = ٢ كون هـ (٢) = صفر ، $\lim_{س \leftarrow ٢}$ هـ (س) = | ٢ − ٢ | = صفر

والآن ق . هـ = (٢س + ١) $\begin{cases} س - ٢ & ، س \geq ٢ \\ ٢ - س & ، س < ٢ \end{cases}$

$= \begin{cases} ٢س^٢ - ٣س - ٢ & ، س \geq ٢ \\ -٢س^٢ + ٣س + ٢ & ، س < ٢ \end{cases}$

(ق . هـ) (٢) = صفر بالتعويض المباشر

$\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ (ق . هـ) (س) = $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ (ق . هـ) (٢) = صفر بالتعويض المباشر.

∴ (ق. هـ) (س) متصل.

مثال: إذا كان ق (س) = $\begin{cases} ١ & ، س \geq ٠ \\ -١ & ، س < ٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال [ق (س)]^٢ عند س = صفر

لنبحث أولاً في اتصال ق(س) نفسه، عند س = صفر

ق (٠) = ١ من القاعدة الأولى

$\lim_{س \leftarrow ٠^+}$ ق (س) = ١ ، $\lim_{س \leftarrow ٠^-}$ ق (س) = − ١

∴ $\lim_{س \leftarrow ٠}$ ق (س) غير موجودة

أي أن ق (س) غير متصل عند س = صفر

لنجد قاعدة (ق (س))^{٢} هكذا :

$$(ق (س))^{٢} = \begin{cases} (١)^{٢} &، \quad س \geq ٠ \\ (-١)^{٢} &، \quad س < ٠ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ١ &، \quad س \geq ٠ \\ +١ &، \quad س < صفر \end{cases}$$ أي أن (ق (س))^{٢}= ١ اقتران ثابت

وهو متصل على ح

∴ (ق (س))^{٢} متصل عند س = صفر

هذا المثال يُجسّد الحقيقة القائلة :

◘ مُربع الاقتران غير المتصل يمكن أن يكون متصلاً!!!

أمثلة محلولة على النهايات والاتصال

مثال١: أوجد:

(١) $\lim_{س \to ٠}$ (س^٤ + ٣س^٣ + س + ١)

الحل: بالتعويض المباشر:

$= (٠)^٤ + ٣(٠)^٣ + (٠) + ١ = ١$

(٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س^٢ - ٥س + ٤}$

الحل: انطاق البسط:

$\lim_{س \to ٤} \frac{(\sqrt{س} - ٢)(\sqrt{س} + ٢)}{(س^٢ - ٥س + ٤)(\sqrt{س} + ٢)} = \lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{(س - ١)(س - ٤)(\sqrt{س} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{١}{(س - ١)(\sqrt{س} + ٢)} = \frac{١}{(س - ١)(\sqrt{٤} + ٢)} = \frac{١}{(٣)(٤)} = \frac{١}{١٢}$

(٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٧}{\sqrt{س + ٢} - ٣}$

الحل: انطاق المقام

$\lim_{س \to ٧} \frac{(س - ٧)(\sqrt{س + ٢} + ٣)}{(\sqrt{س + ٢} - ٣)(\sqrt{س + ٢} - ٣)} = \lim_{س \to ٧} \frac{(س - ٧)(\sqrt{س + ٢} + ٣)}{س + ٢ - ٩}$

$\lim_{س \to ٧} \frac{(س - ٧)(\sqrt{س + ٢} + ٣)}{(س - ٧)} = \lim_{س \to ٧} (\sqrt{س + ٢} + ٣)$

$= \sqrt{٧ + ٢} + ٣ = \sqrt{٩} + ٣ = ٣ + ٣ = ٦$

⇦مثال٢ : أوجد :

(١) $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{جا ٣س}{ظا ٥س}$

الحل: نقسم كلاً من البسط والمقام على س هكذا

$$\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{جا ٣س}{ظا ٥س} = \underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{\frac{جا ٣س}{س}}{\frac{ظا ٥س}{س}} = \frac{\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{جا ٣س}{س}}{\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{ظا ٥س}{س}} = \frac{٣}{٥}$$

(٢) $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{جتا^{٢} س - ١}{س (جتاس + ١)}$

الحل: نحول البسط إلى الجيب هكذا

$جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١$ متطابقة مشهورة

ومنها $جتا^{٢}س = ١ - جا^{٢}س$

$\therefore جتا^{٢}س - ١ = - جا^{٢}س$

$$\therefore \underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{جتا^{٢} س - ١}{س (جتاس + ١)} = \underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{- جا^{٢}س}{س (جتاس + ١)}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{جاس}{س} \times \underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{- جاس}{جتاس +١}$$

$$= (١) \left(\frac{- جا صفر}{جتا صفر +١} \right) = (١) \left(\frac{صفر}{١ + ١} \right) = (١) (صفر) = صفر$$

(٣) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{نها} \frac{جا (س + \frac{\pi}{٤}) - ١}{س - \frac{\pi}{٤}}$

الحل نفرض أن ص = س - $\frac{\pi}{٤}$

∴ س = ص + $\frac{\pi}{٤}$

$$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{نها} \frac{جا\,(س + \frac{\pi}{٤}) - ١}{س - \frac{\pi}{٤}} = \underset{ص \leftarrow ٠}{نها} \frac{جا\,(ص + \frac{\pi}{٤} + \frac{\pi}{٤}) - ١}{ص}$$

$$= \underset{ص \leftarrow ٠}{نها} \frac{جا\,(ص + \frac{\pi}{٢}) - ١}{ص}$$

وبما أن جا $\frac{\pi}{٢}$ = ١

$$∴ \underset{ص \leftarrow ٠}{نها} \frac{جا\,(ص + \frac{\pi}{٢}) - جا\,(\frac{\pi}{٢})}{ص}$$

وبعد تحويل البسط إلى حاصل ضرب اقترانين

$$= \underset{ص \leftarrow ٠}{نها} \frac{٢جا\,\frac{ص}{٢}\,جتا\,(\frac{ص + \pi}{٢})}{ص}$$

$$= \underset{ص \leftarrow ٠}{نها} \frac{٢جا\,\frac{ص}{٢}\,جتا\,(\frac{ص}{٢} + \frac{\pi}{٢})}{\frac{٢ص}{٢}}$$

$$= \underset{ص \leftarrow ٠}{نها} \frac{جا\,\frac{ص}{٢}}{\frac{ص}{٢}} \times \underset{ص \leftarrow ٠}{نها}\,(\frac{ص}{٢} + \frac{\pi}{٢})$$

= (١) (جتا $\frac{\pi}{٢}$) = (١) (صفر) = صفر

⇦مثال٣: أوجد:

(١) $\underset{س \leftarrow ٤}{نها} \left((\frac{١}{س} - \frac{١}{٤}) (\frac{١}{س - ٤}) \right)$

الحل: توحيد المقامات

$$\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \left[\left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٤}\right) \left(\frac{١}{س - ٤}\right) \right] = \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \left(\frac{٤ - س}{٤ س}\right) \left(\frac{١}{س - ٤}\right)$$

$$\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{-١}{٤ س} = \frac{-١}{٤ (٤)} = \frac{-١}{١٦}$$

(٢) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١ + \sqrt{س}}{١ - \sqrt{س}}$

الحل: بالتعويض المباشر

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١ + \sqrt{س}}{١ - \sqrt{س}}$$

$$= \frac{١ + \sqrt{٠}}{١ - \sqrt{٠}} = \frac{١ + \text{صفر}}{١ - \text{صفر}} = \frac{١}{١} = ١$$

(٣) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{١ + \sqrt{س}}{١ - \sqrt{س}}$

الحل: انطاق المقام:

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{١ + \sqrt{س}}{١ - \sqrt{س}} \times \frac{١ + \sqrt{س}}{١ + \sqrt{س}}$$

$$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{(١ + \sqrt{س})^٢}{١ - ١} = \frac{(١ + \sqrt{١})^٢}{\text{صفر}} = \frac{٤}{\text{صفر}} \quad \text{غير موجودة}$$

⇦مثال٤: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ & ، \quad س < ١ \\ أ س - ٣ & ، \quad س \geq ١ \end{cases}$

ما قيمة أ ليصبح ق(س) متصلاً عند س = ١

الحل: ليكون ق(س) متصلاً يجب أن يكون

ق (١) = نها ق (س)
س ← ١

ق (١) = أ (١) - ٣ = أ - ٣

نها ق (س)
س ← ١

من اليمين $(١)^{٢}$ = ١

من اليسار أ (١) - ٣

∴ أ - ٣ = ١   أ = ٤

⇦ مثال٥: ابحث في اتصال ق(س) = $\frac{س - ١}{|س - ١|}$ عند س = ١

الحل: نعيد التعويض هكذا:

$|س - ١| = \begin{cases} ١ - س & ، س < ١ \\ س - ١ & ، س \leq ١ \end{cases}$

$ق(س) = \begin{cases} \frac{س - ١}{١ - س} & ، س < ١ \\ \frac{س - ١}{س - ١} & ، س \leq ١ \end{cases}$

$ق(س) = \begin{cases} -١ & ، س < ١ \\ ١ & ، س \leq ١ \end{cases}$

ق (١) = بالتعويض المباشر قبل إعادة التعويض = $\frac{١ - ١}{|١ - ١|}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

∴ ق (س) غير معرف عند س = ١

$$\text{نها ق (س)} = \begin{cases} -1 & \text{من اليمين} \\ 1 & \text{من اليسار} \end{cases}$$
س ← ١

∴ نها ق (س) غير موجودة
س ← ١

∴ ق (س) غير متصل

ولا يمكن إعادة تعريفه ليصبح متصلاً كونه غير معرف عند س = ١

⇦مثال ٦: ابحث في اتصال

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^2 + 4 & \text{، س} > 2 \text{ القاعدة الأولى} \\ 5 & \text{، س} = 2 \text{ القاعدة الثانية} \\ \text{س}^3 & \text{، س} < 2 \text{ القاعدة الثالثة} \end{cases}$$
عند س = ٢

الحل: ق (٢) = ٥ القاعدة الثانية لتعريف الاقتران

نها ق (س) من اليمين واليسار
س ← ٢

نها ق (س) = نها س^3 = $(2)^3$ = ٨
$\text{س} \leftarrow 2^+$ ، $\text{س} \leftarrow 2$

نها ق (س) = نها (س^2 + ٤) = 2^2 + ٤ = ٨
$\text{س} \leftarrow 2^-$ ، $\text{س} \leftarrow 2$

∴ نها ق (س) = ٨
س ← ٢

وبما أن ق (٢) ≠ نها ق (س)
س ← ٢

∴ ق (س) غير متصل عندما س = ٢

ولكن يمكن إعادة تعريفه ليصبح متصلاً عند س = ٢ عندما نجعل القيمة = النهاية عند س =٢

هكذا:

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٤ &، س < ٢ \\ ٨ &، س = ٢ \\ س^٢ &، س > ٢ \end{cases}$$

الآن أصبح ق (س) متصلاً عند س = ٢ كون القيمة = النهاية = ٨

⇦مثال ٧: إذا كان $١ \leq ق(س) \leq (س - ٣)^٢ + ١$

أوجد $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) ، س $\neq ٣$

الحل باستخدام نظرية الشطيرة

بما أن $\lim_{س \to ٣} ١ = ١$ كون نهاية الثابت = نفسه

وأن $\lim_{س \to ٣} (س - ٣)^٢ + ١ = (٣ - ٣)^٢ + ١ = ١$ بالتعويض المباشر

وأن $\lim_{س \to ٣} ١ = \lim_{س \to ٣} (س - ٣)^٢ + ١ = ١$ (الطرفان متساويان بالنهاية)

∴ وحسب نظرية الشطيرة فإن

$\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ١

⇦مثال ٨: اوجد $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - \frac{١}{س^٢}}{١ - \frac{١}{س}}$ ، س $\neq$ صفر

الحل: بالتحليل إلى العوامل:

$$\lim_{س \to 0} \frac{1 - \frac{1}{س^2}}{1 - \frac{1}{س}} = \lim_{س \to 0} \frac{(1 - \frac{1}{س})(1 + \frac{1}{س})}{(1 - \frac{1}{س})}$$ كفرق بين مربعين

$= 1 + \frac{1}{صفر}$ = غير موجودة.

مثال ٩: اوجد $\lim_{س \to 1} \frac{س^5 - 1}{س^4 - 1}$

بالقسمة الطويلة

$$\begin{array}{r|l} س & \\ \hline س^5 - 1 & س^4 - 1 \\ \mp س^5 \pm س & \\ \hline س - 1 & \end{array}$$

ينتج أن:

$$\lim_{س \to 1} \frac{س^5 - 1}{س^4 - 1} = \lim_{س \to 1} (س + \frac{س - 1}{س^4 - 1})$$

$$\lim_{س \to 1} س + \lim_{س \to 1} \frac{س - 1}{س^4 - 1} = \lim_{س \to 1} س + \lim_{س \to 1} \frac{س - 1}{(س^2 - 1)(س - 1)(س + 1)}$$

$$= 1 + \frac{1}{(1 + 1)(1 + 1)} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

مثال ١٠: ابحث في اتصال $ق(س) = \sqrt{س - 1}$ عند $س = 2$

الحل:

القيمة $ق(2) = \sqrt{2 - 1} = \sqrt{1} = 1$

$\lim_{س \to 2} ق(س) = \lim_{س \to 2} \sqrt{س - 1} = \sqrt{2 - 1} = \sqrt{1} = 1$

$\therefore$ النهاية = القيمة

$\therefore$ $ق(س)$ متصل عند $س = 2$

مثال ١١: ابحث في اتصال ق (س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ في الفترة [- ٢ ، ٢]

الحل:

يمين يسار

- ٢ خلال الفترة ٢

نبحث في اتصال ق(س) عند س = صفر، وعلى اليسار س = ٢ وعلى اليمين س = - ٢ ولكن لنتأكد أن مجاله هو [- ٢ ، ٢]

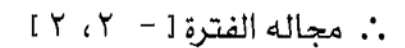
نجد أصفاره: $٤ - س^٢ \geq$ صفر

(٢ - س) (٢ + س) $\geq$ صفر

عكس إشارة

نفس إشارة أ   أ ، $س^٢$ نفس إشارة أ

∞ - - - - - ٢- - + + + + + ٢ - - - - - ∞



∴ مجاله الفترة [- ٢ ، ٢]

ق(- ٢) = $\sqrt{٤ - (- ٢)^٢}$ = صفر

نها ق(س) = صفر
س ← - ٢⁺

من الرسم أو التعويض المباشر

يمين يسار
- ٢ ∴ ٢

ق(٢) = $\sqrt{٤ - ٢^٢}$ = صفر

نها ق(س) = صفر من الرسم أو التعويض المباشر
س ← ٢⁻

ق(٠) = $\sqrt{٤ - (٠)^٢}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

نها ق (س) = $\sqrt{٤ - ٠}$ = ٢ ∴ ق (س) متصل على الفترة [- ٢ ، ٢]
س ← ٠

⇦مثال ١٢ : ابحث في اتصال ق (س) = $\begin{cases} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} & \text{، س} \neq \text{صفر (النهاية)} \\ 1 & \text{، س = صفر (القيمة)} \end{cases}$

على ح أو (- ∞، ∞)

الحل:

بما أن س = صفر نقطة تغيير بالتعويض والقاعدة الأولى اقتران مثلثي متصل والثانية ثابت متصل، لذا نبحث اتصاله في س = صفر

ق(صفر) = ١ القاعدة الثانية

نها ق(س) = نها $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ = ١ حسب النظرية
س ← ٠ س ← ٠

∴ ق (س) متصل على ح = (- ∞، ∞)

⇦مثال ١٣ : استقرئ منحنيات الاقترانات التالية وبين أيها متصل عند س= ٢

الحل:

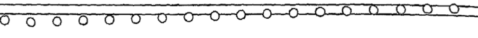
التفسير:

ق(٢) = ٣

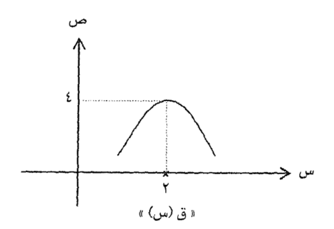
نها ق (س) = ٢
س ← ٢

« ق (س) »

∴ ق (س) غير متصل كون النهاية ≠ القيمة عند س = ٢



الحل:



هـ (٢) = ٤

$\lim_{س \to ٢}$ هـ (س) = ٤

∴ هـ (س) متصل

كون القيمة = النهاية

عند س = ٢

⇦مثال ١٤: أوجد

(١) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٤ - ٥ س - ١}{س^٦ + ٢}$

الحل: نكتفي هنا بالحد الذي درجته أعلى في البسط وكذلك في المقام هكذا:

$\lim_{س \to \infty} \frac{س^٤}{س^٦} = \lim_{س \to \infty} \frac{١}{س^٢}$ = صفر

(٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٣ + ٢ س - ٥}{س^٣ - ٧}$

الحل: $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٣}{س^٣} = \lim_{س \to \infty} ١ = ١$ كون نهاية الثابت = نفسه

⇦مثال ١٥: أوجد نقط عدم الاتصال في كل من الاقترانات التالية ثم أوجد مجاله.

(١) ق (س) $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ١}$

الحل: نصفر الاقتران

$س^2 + 1 =$ صفر، $س^2 = -1$ وهذا لا يجوز كون الطرف الأيمن موجب والأيسر سالب.

∴ لا يوجد نقط عدم اتصال

∴ مجال ق (س) = ح

(٢) ق (س) $\frac{س^2 + 1}{س^2 - 1}$

الحل: نصفر المقام

$س^2 - 1 =$ صفر

(س + ١) (س − ١) = صفر

س = ± ١

∴ س = {− ١، ١} نقط عدم اتصال

مجاله ح − {− ١، ١}

(٣) ق (س) $\frac{1 - جتا2س}{س}$

الحل:

س = صفر نقطة عدم اتصال

∴ مجاله: ح − {٠} = $ح^+$

(٤) ق(س) = $\sqrt{س + \frac{1}{س}}$

الحل:

$س + \frac{1}{س} \leq$ صفر

$\frac{س^{2} + 1}{س} \leq$ صفر

إشارة البسط + + + + + + + +

إشارة المقام - - - - × + + + +

∴ س > صفر مجاله

∴ س ≤ صفر فترة عدم الاتصال هنا فترة وليست نقطة.

⇐مثال ١٦: أوجد نها$_{س \leftarrow 4}$ $\frac{س^{2} - 8\sqrt{س}}{4 - س}$

الحل: نفرض أن ص = $\sqrt{س}$ وبالتربيع

$ص^{2} = س$

وعندما س ⟵ ٤ ، $ص^{2}$ ⟵ ٤ ، ومنها ص ⟵ ٢

∴ نها$_{س \leftarrow 4}$ $\frac{س^{2} - 8\sqrt{س}}{4 - س}$ = نها$_{ص \leftarrow 2}$ $\frac{(ص^{2})^{2} - 8ص}{4 - ص^{2}}$

= نها$_{ص \leftarrow 2}$ $\frac{ص^{4} - 8ص}{4 - ص^{2}}$ = نها$_{ص \leftarrow 2}$ $\frac{ص(ص^{3} - 8)}{(2 - ص)(2 + ص)}$ بالتحليل

نها$_{ص \leftarrow 2}$ $\frac{ص(ص - 2)(ص^{2} + 2ص + 4)}{(2 - ص)(2 + ص)}$ وكذلك التحليل

نها$_{ص \leftarrow 2}$ $\frac{ص^{3} + 2ص^{2} + 4ص}{2 + ص}$

$$= -\frac{(٢)^٣ + ٢(٢)^٢ + ٤(٢)}{٢ + ٢} = -\frac{٨ + ٨ + ٨}{٤}$$

$$= -\frac{٢٤}{٤} = -٦$$

مثال ١٧: إذا كان ق (س) = { ٣ - س ، س < ٢ القاعدة الأولى
٢ - $\frac{١}{٤}$ س^٢ ، ٢ < س < ٤ القاعدة الثانية
س - ٤ ، ٤ ≥ س القاعدة الثالثة

ما هي مجموعة نقط عدم اتصال الاقتران ق (س) ؟

الحل:

نبحث الاتصال عند س = ٢ ، س = ٤ كونها نقط تغيير في التعريف

عندما س = ٢

ق (٢) = لا قيمة للاقتران كونه غير معرف عند س = ٢

∴ عندما س = ٢ نقطة عدم اتصال

عندما س = ٤

ق (٤) = ٤ — ٤ = صفر (عوضنا في القاعدة الثالثة)

نها ق(س)
س ← ٤

من اليمين: نها ق(س) = ٤ — ٤ = صفر القاعدة الثالثة
س ← ٤$^+$

من اليسار: نها ق(س) = ٢ — $\frac{١}{٤}$ (٤)^٢ = ٢ — ($\frac{١}{٤}$) (١٦) = - ٢
س ← ٤$^-$

القاعدة الثانية

وبما أن نها ق(س) ≠ نها ق(س)
س ← ٤$^+$ س ← ٤$^-$

∴ نها ق(س) غير موجودة
$س \leftarrow ٤$

لذا فمجموعة نقط عدم اتصال ق (س) = {٢، ٤}

⇦مثال ١٨ : إذا كان ق (س) = $\begin{cases} \frac{١}{س} \text{ جا } \frac{س}{٢} & \text{، س} \neq \text{صفر القاعدة الأولى} \\ \text{ك} & \text{، س = صفر القاعدة الثانية} \end{cases}$

ما قيمة ك ليكون ق (س) متصل عند س = صفر ؟

الحل: ليكون ق (س) متصل عند س = صفر يجب أن يتحقق الشرط التالي:

ق (صفر) = نها ق (س) (أي القيمة = النهاية عند س = صفر)
س ← صفر

ق (صفر) = ك (القاعدة الثانية)

$$\text{نها}_{س \leftarrow \text{صفر}} \text{ ق (س) = نها}_{س \leftarrow ٠} \frac{١}{س} \text{ جا} \frac{س}{٢}$$

هنا نضرب البسط والمقام $\frac{١}{٢}$ س أو نقسم البسط والمقام على $\frac{١}{٢}$ س

هكذا:

$$\text{نها}_{س \leftarrow ٠} \frac{\frac{١}{س} \text{ جا } \frac{س}{٢} \times \frac{س}{٢}}{\frac{س}{٢}} = \text{نها}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا } \frac{س}{٢}}{\frac{س}{٢}} \times \text{نها}_{س \leftarrow ٠} \frac{١}{س} \times \frac{س}{٢}$$

$$= (١) \left(\frac{١}{٢} \right) = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \text{ ك} = \frac{١}{٢}$$

فيصبح الاقتران ق (س) = $\begin{cases} \frac{١}{س} \text{ جا } \frac{س}{٢} & \text{، س} \neq \text{صفر} \\ \frac{١}{٢} & \text{، س = صفر} \end{cases}$

متصلاً عند س = صفر تحقق من ذلك!

مثال ١٩: إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[3]{س - ١} - أ}{س - ٢}$ موجودة

ما قيمة أ ؟

الحل: لتكون نهاية الاقتران موجودة يجب أن يُنتج التعويض المباشر لقيمة س في البسط والمقام الكمية = $\frac{صفر}{صفر}$

ومنها البسط = صفر والمقام أيضاً أي أن:

$\sqrt[3]{س - ١} - أ = صفر$ وكذلك س — ٢ = صفر ⟵ س = ٢

∴ $\sqrt[3]{٢ - ١} - أ = صفر$

$\sqrt[3]{١} = أ$

∴ أ = ١

مثال ٢٠: أوجد «١» $\lim_{س \to ٠,٨} [س + ١]$ «٢» $\lim_{س \to ١} [س + ١]$

الحل: قاعدة إيجاد نهاية اقتران أكبر عدد صحيح بإيجاز شديد:

«نعوض ما تؤول إليه ٢ في الاقتران فإذا نتج عدد صحيح فالنهاية غير موجودة وإذت نتج عدد غير صحيح فالنهاية تساوي القيمة».

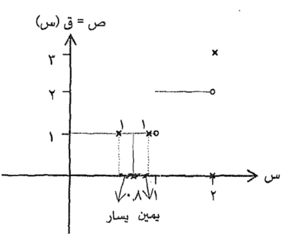
هكذا:

$\lim_{س \to ٠,٨} [س + ١]$ = ق (٠,٨) = [٠,٨ + ١] = [١,٨] والعدد ١,٨ ∉ ص

(عدد غير صحيح)

لذا فإن $\lim_{س \to ٠,٨} [س + ١]$ = [١,٨] = ١

(لأن النهاية من اليمين = النهاية من اليسار) كما في الشكل



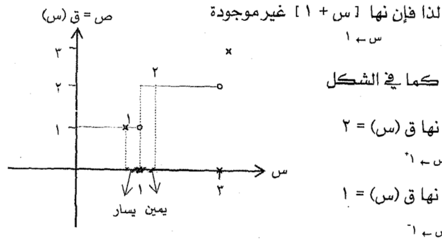
حيث يعرف

[س + ١] = ١ ، ٠ ≤ س < ١
٢ ، ١ ≤ س < ٢
٣ ، س = ٢

وأما نها [س + ١] = [١ + ١] = [٢] والعدد ٢ ∋ ص (عدد صحيح)
س ← ١

لأن النهاية من اليمين ≠ النهاية من اليسار

لذا فإن نها [س + ١] غير موجودة
س ← ١



كما في الشكل

نها ق (س) = ٢
س ← ١⁺

نها ق (س) = ١
س ← ١⁻

أي أن نها ق (س) غير موجودة
س ← ١

(٢٠ – ٦) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

(١) أوجد $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow -\text{أ}} \dfrac{\text{س}^{٥} + \text{أ}^{٥}}{\text{س} + \text{أ}}$

{إرشاد : استعن بالقسمة الطويلة أو التركيبية}

(٢) أوجد $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٣}{\text{س} - ٣}$

{غير موجودة}

(٣) أوجد

«١» $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٢} \dfrac{٢\text{س} - ٥}{٤\text{س} + ٣}$ {$-\dfrac{١}{١١}$ ، تعويض مباشر}

«٢» $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٢} \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}}$ ، س $\neq$ صفر {١ ، إعادة التعريف}

«٣» $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ١} \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١}$ {٢ ، تحليل}

«٤» $\text{نها} \dfrac{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س}}$ {١ ، متطابقات مشهورة}

(٤) إذا كانت $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}$ ق (س) = $-$ ٢ ، $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}$ هـ (س) = ٣

فما $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}$ (ق . هـ) (س) ، نها $\left(\dfrac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)$ (س) {-٦ ، $-\dfrac{٢}{٣}$}

(٥) أوجد $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٩} \dfrac{\text{س}(\sqrt{\text{س}} - ٣)}{\text{س} - ٩}$ {$\dfrac{٣}{٢}$ ، تحليل أو انطاق}

(٦) أوجد $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{٢ + \frac{١}{\text{س}}}{٣ + \frac{١}{\text{س}}}$ {١ ، توحيد المقامات}

(٧) أوجد

«١» $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} + ٢}}{\text{س} - ٢\sqrt{\text{س} + ١}}$ {٢ ، تعويض مباشر}

«٢» $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - ١}$ {غير موجودة}

«٣» $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \sqrt{\dfrac{١}{\text{س}^{٢}}}$ {∞، استعن بالرسم}

«٤» $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \left(\dfrac{١}{\text{س} - ٣} - \dfrac{١}{\text{س}^{٢} - ٩} \right)$ { $\frac{١}{٦}$ ، توحيد المقامات}

(٨) أوجد نقط عدم اتصال كل من الاقترانات:

«١» $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} + ٤}{\text{س}^{٢} - ٩}$ {− ٣، ٣}

«٢» $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} + ٢}{\text{س}^{٢} + ٥\,\text{س} - ٦}$ {− ٦، ١}

«٣» $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + ١}$ {لا يوجد}

(٩) أوجد

«١» $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{٢\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٥\,\text{س} - ١}{٣\text{س}^{٤} + ٥\text{س}^{٢} - ٤\text{س}^{٢} + ٤}$ {صفر}

«٢» $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{١ + \text{س} + \text{س}^{٢}}{٢\text{س}^{٢} + \text{س} + ١}$ { $\frac{١}{٢}$ }

«٣» نها $\frac{س^٣ + س^٢ + س + ١}{س^٢ - س - ١}$ س ← ∞ {∞}

«٤» نها $\frac{س + \pi}{جا س}$ س ← - π {- ١ ، أفرض ص = س + π}

(١٠) أوجد نها $\frac{(س^٢ - س - ٦)^٢}{(س + ٢)^٢}$ س ← - ٢ {٢٥ ، تحليل}

(١١) هل الاقتران ق (س) = $\frac{س - ٣}{|س^٢ - ٥س + ٦|}$ متصل عند س = ٣ ؟

(١٢) أوجد نقط عدم الاتصال للاقتران

ق (س) = { س^٣ ، س ≤ - ١
س^٢ ، - ١ < س < ١
س ، س ≥ ١

{- ١}

(١٣) ما قيمة م التي تجعل الاقتران

ق (س) = { ١ + س^٢ ، س ≤ ٢
م + س^٣ ، س > ٢ متصلاً عند س = ٢

{- ٣}

(١٤) ابحث في اتصال ق (س) = { س^٢ ، س ≤ ١
س ، س > ١ عند س =١

{متصل}

(١٥) أوجد نها $\frac{جا س}{\sqrt[٣]{س^٢}}$ س ← صفر ، س ≠ صفر {٠ ، أضرب البسط والمقام بالكمية $\sqrt[٣]{س}$ }

(١٦) ابحث في اتصال ق (س) = $\frac{س^4 + س^2 - ٢}{س^2 - ١}$ عند س= ١

{غير متصل عند س = ١}

(١٧) ابحث في اتصال ق (س) = $\sqrt{١ - س}$ عند س= ١

{غير متصل عند س = ١، استعن بالرسم والنهاية من اليمين واليسار}

(١٨) احسب النهايات التالية:

«١» نها$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{٥ جا ٦س}{٤ س}$ { $\frac{١٥}{٢}$ }

«٢» نها$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{\sqrt{٢ + ٣س} - \sqrt{٢ - ٣س}}{س}$ { $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ ، انطاق البسط}

(١٩) أوجد

«١» نها$_{س \leftarrow ٢}$ $\sqrt{س + \frac{١}{س}}$ { $\sqrt{\frac{٥}{٢}}$ تعويض مباشر}

«٢» نها$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{جا٢س}{س}$ { ٢ }

(٢٠) ابحث في اتصال الاقتران:

ق (س) = $\begin{cases} ٣س - ٤ & ، س < ٢ \\ ٣س + ٤ & ، س \geq ٢ \end{cases}$ عند س =١

{غير متصل عند س = ٢}

(٢١) أوجد نها$_{س \leftarrow ٣}$ $\frac{\sqrt{س + ١}}{٢س - ١}$ { $\frac{٢}{٥}$ }

(٢٢) أوجد نها $\frac{\text{جتا س} - ١}{\text{س}}$ { صفر }
س ← ٠

(٢٣) أوجد نها $(١ - \frac{٢}{\text{س}}) (\frac{٣}{٤ - \text{س}^٢})$ {$- \frac{٣}{٨}$ ، توحيد مقامات}
س ← ٢

(٢٤) أوجد نها $\frac{\text{جا س}}{\text{س}^٢}$ {غير موجودة }
س ← ٠

(٢٥) أوجد

«١» نها $\frac{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤}{\text{س} - ٢}$ {صفر}
س ← ٢

«٢» نها $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤}$ {غير موجودة}
س ← ٢

«٣» نها ق (س) = $\begin{cases} ٣\text{س} - ١ & ، \text{س} \neq ٢ \\ ٤٥ & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$ {٥}
س ← ٢

«٤» نها $\begin{cases} -٢\text{س} & ، \text{س} \leq ١ \\ ٢\text{س} & ، \text{س} > ١ \end{cases}$ {غير موجودة}
س ← ١

(٢٦) ابحث في اتصال الاقترانات التالية:

«١» ق (س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ & ، \text{س} \leq ١ \\ \text{س} & ، \text{س} > ١ \end{cases}$ عند س = ١
{متصل}

«٢» ق (س) = $\sqrt{٤ - \text{س}^٢}$ في الفترة [- ٢ ، ٢] {متصل}

«٣» ق (س) = س جا س + ١ . على ح {متصل}

(٢٧) إذا كان ق(س) = $\frac{جا س}{س}$ ، س ≠ صفر

أعد تعريف الاقتران ليصبح متصلاً على ح

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{جاس}{س} &، س \neq صفر \\ ١ &، س = صفر \end{cases}$$

(٢٨) أوجد نها$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{س^{٥} - ١}{س^{٢} - ١}$

{إرشاد : اقسم البسط على س - ١ وحلل المقام}

(٢٩) أوجد نها$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{\sqrt{س + ٣} - \sqrt{٣}}{س}$ $\{\frac{١}{٦}\sqrt{٣}\}$

{إرشاد : انطاق البسط}

(٣٠) أوجد نها$_{س \leftarrow \infty}$ $\frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} - ١}$ {١}

(٣١) ابحث في اتصال الاقتران ق(س) = $\frac{س^{٣} + ٢س^{٢} + س}{س^{٢} - ٣س + ٢}$ عند س = ١ ، س = ٣

{غير متصل، متصل}

(٣٢) أوجد نها$_{س \leftarrow ٤}$ $\frac{\sqrt{س} - ٢}{س^{٢} - ٥س - ٤}$ {انطاق البسط، $\frac{١}{١٢}$ }

(٣٣) أوجد نها$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{\sqrt{س - ١}}{س - ١}$ {غير موجودة}

(٣٤) أوجد

«١» نها $\frac{\sqrt{\text{س} + ٢} - ٢}{\sqrt{\text{س} + ٧} - ٤}$ ، س ← ٢ {انطق البسط والمقام، $\frac{٣}{٢}$ }

«٢» نها $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا٢س}}$ ، س ← ٠ {٠}

«٣» نها (١ + جتاس) ظا $\frac{\pi}{٢}$ ، س ← π {صفر، عوض بدلاً من ظا $\frac{\pi}{٢}$ }

«٤» نها $\frac{\text{جتا س} - \text{جتا أ}}{\text{جا س} - \text{جا أ}}$ ، س ← $\frac{\pi}{٢}$ { $\frac{\text{ظا}\ \frac{\text{أ}}{٢}}{١ - \text{ظا}\ \frac{\text{أ}}{٢}}$ }

«٢» نها $\frac{\text{س}^{٤} - ٥\ \text{س} + ١}{\text{س}^{٥} + ٢}$ ، س ← ∞ {صفر}

(٣٥) اعتماداً على الأشكال المجاورة التالية أوجد:

«الشكل ١»

«١» نها ق(س) ، س ← ٢^{+}

«٢» نها ق(س) ، س ← ٢^{-}

«٣» نها ق(س) ، س ← ٢ {غير موجودة}

«٣» نها ق(٢) {الاقتران غير معرف}

« شكل ١ »

«الشكل ٢»

«١» نها ق(س) ، س ← ٣^{+}

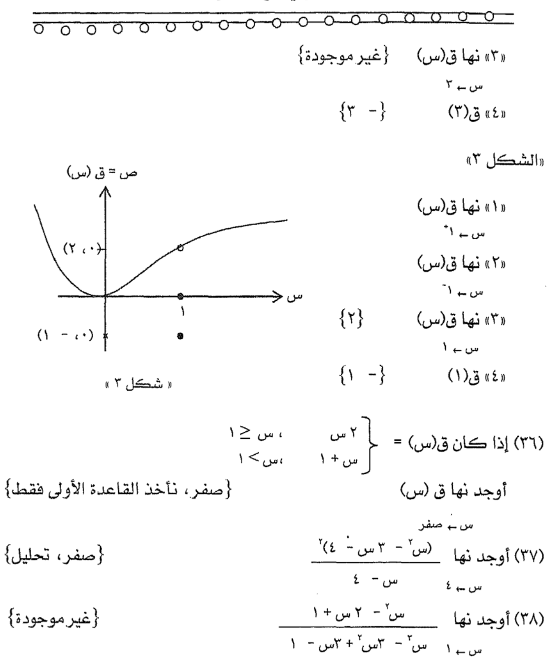
«٢» نها ق(س) ، س ← ٣^{-}

« شكل ٢ »

«٣» نها ق(س) {غير موجودة}
س ← ٣

«٤» ق(٣) {- ٣}

«الشكل ٣»



« شكل ٣ »

«١» نها ق(س)
س ← ١^+

«٢» نها ق(س)
س ← ١^-

«٣» نها ق(س) {٢}
س ← ١

«٤» ق(١) {- ١}

(٣٦) إذا كان ق(س) = { ٢ س ، س ≤ ١ ؛ س + ١ ، س > ١

أوجد نها ق (س) {صفر، نأخذ القاعدة الأولى فقط}
س ← صفر

(٣٧) أوجد نها (س² - ٣ س - ٤)² / (س - ٤) {صفر، تحليل}
س ← ٤

(٣٨) أوجد نها (س² - ٢ س + ١) / (س³ - ٣س² + ٣س - ١) {غير موجودة}
س ← ١

إرشاد: استعن بنظرية العوامل والقسمة التركيبية بعد التحليل إلى العوامل حيث س - ١ عامل مشترك بين البسط والمقام.

(٣٩) ابحث في اتصال الاقتران ق (س) = ظا √(س - $\frac{\pi}{٢}$) عند س = $\frac{\pi}{٢}$
{غير متصل}

إرشاد: أوجد مجاله أولاً والنهاية من اليمين واليسار

(٤٠) أوجد نها $\frac{\text{جا}(\text{س} + \frac{\pi}{2})}{\text{س} + \frac{\pi}{2}}$ ، س ← ٠ { $\frac{2}{\pi}$ ، تعويض مباشر}

(٤١) ما قيمة أ ليكون ق (س) = $\begin{cases} \text{س}^2 - 1 & \text{، س} \geq 2 \\ 5\text{أ} + 4\text{س} & \text{، س} \leq 2 \end{cases}$

متصلاً عند س = ٢

{- ١}

(٤٢) ما نها $\frac{\text{س} - 2\sqrt{\text{س} + 1}}{\text{س} - 1}$ ، س ← ١ {صفر}

إرشاد: تحليل أو انطاق

(٤٣) «١» ما نها $\frac{\text{جا } 2\text{س}}{\text{س}}$ ، س ← ٠ {٢}

«٢» و نها $\frac{\text{جا}(\text{أ} + \text{س}) - \text{جا}(\text{أ} - \text{س})}{\text{س}}$ ، س ← ٠ {٢ جتا أ}

إرشاد: حول الفرق إلى حاصل ضرب

«٣» ثم نها $\frac{\text{جا}(\text{س} - 2)}{\text{س}^3 - 8}$ ، س ← ٢ { $\frac{1}{12}$ }

إرشاد: عوض ص = س - ٢

(٤٤) ما نها $\frac{\text{س}^2 - 8\sqrt{\text{س}}}{4 - \text{س}}$ ، س ← ٤ {٦}

إرشاد: افرض ص = $\sqrt{\text{س}}$

(٤٥) أوجد نها $\frac{1 + \text{جتا } 2\text{س}}{(2\text{س} + \pi)^2}$ ، س ← $-\frac{\pi}{2}$ { $\frac{1}{4}$ }

إرشاد: افرض ص = س + $\frac{\pi}{٢}$ واستخدم متطابقات مثلثية عدة

(٤٦) إذا كان ق(س) = س^{٢} + س، احسب نها$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{هـ}$ {١}

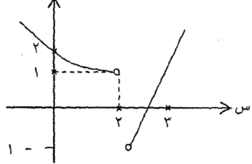
(٤٧) ابحث في اتصال الاقتران

ق (س) = { $\frac{س^{٢} + س}{س}$ ، س ≠ صفر
٢ ، س = صفر

عندما س = صفر

{غير متصل}

(٤٨) من الشكل المرفق أوجد:



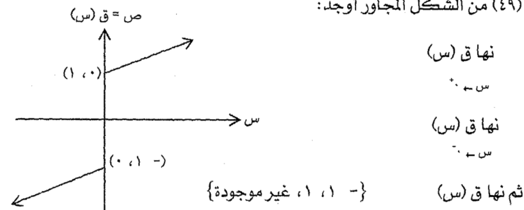
«١» نها$_{س \leftarrow ٢^{+}}$ ق(س)

«٢» نها$_{س \leftarrow ٢^{-}}$ ق(س)

«٣» نها$_{س \leftarrow ٢}$ ق(س)

{- ١ ، ١ ، غير موجودة}

(٤٩) من الشكل المجاور أوجد:



نها$_{س \leftarrow ٠^{+}}$ ق (س)

نها$_{س \leftarrow ٠^{-}}$ ق (س)

ثم نها$_{س \leftarrow ٠}$ ق (س) {- ١ ، ١ ، غير موجودة}

(٥٠) أوجد نها كل من:

«١» $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - \sqrt[٣]{\text{أ}}}{\text{س} - \text{أ}}$ $\left\{ \frac{١}{٣\sqrt[٣]{\text{أ}^٢}} \right\}$

إرشاد: تحليل أو انطاق

«٢» $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س}(\text{س}+١)} - \frac{١}{\text{س}}$ $\{-١\}$

إرشاد: توحيد المقامات

«٣» $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^٢+١} - ١}$ {غير موجودة}

إرشاد: انطاق

«٤» $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جا س} - \text{جا أ}}{\text{جتا س} - \text{جتا أ}}$ {ظا أ − قا أ}

إرشاد: تعويض مباشر

(٥١) إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} ٥\text{س} - ١ & ،\ \text{س} > ١ \\ ١ - ٥\text{س} & ،\ \text{س} \leq ١ \end{cases}$ أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}$

{غير موجودة}

(٥٢) أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س} - ١}$ {غير موجودة}

(٥٣) أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نها}} \frac{٢\text{س}^٣ + ٣\text{س}^٢ - ٢}{٥\text{س}^٣ + \text{س} - ٩}$ $\left\{ \frac{٢}{٥} \right\}$

و $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٤}} \dfrac{ظا\,س - ١}{س - \frac{\pi}{٤}}$ {٢}

(٥٤) ما قيمة م في الاقتران $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢م &، -٢ \le س \le ١ \\ ٢س - ٥ &، ١ \le س \le ٣ \end{cases}$

ليكون متصلاً عند س = ١ {-٢}

(٥٥) إذا كان $ق(س) = \dfrac{٣س}{س - ٤}$ ، $س \ne ٤$ ، $هـ(س) = \begin{cases} س + ٥ &، س \le ١ \\ ٨ - ٢س &، س > ١ \end{cases}$

ابحث في اتصال (ق ∘ هـ) (س) عند س = ١ {متصل}

(٥٦) أوجد $\lim\limits_{س \to \pi^{+}} \dfrac{\sqrt{١ + جتا\,س}}{جا\,س}$ { $\dfrac{-١}{\sqrt{٢}}$ }

إرشاد: انطاق البسط ثم القيمة المطلقة

(٥٧) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - (٣ - ٢جـ)س - ٦جـ}{س - ٣} &، س \ne ٣ \\ ٤س - ١ &، س = ٣ \end{cases}$

متصلاً عند س = ٣ فما قيمة جـ {٤}

(٥٨) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س + ٢ &، |س| \le ٢ \\ س^{٢} &، |س| > ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق (س) على مجاله

إرشاد: أعد تعريف الاقتران بفك القيمة المطلقة هكذا

$|س| \le ٢ \leftarrow -٢ \le س \le ٢$ ، $|س| > ٢ \leftarrow ٢ < س$ أو $س < -٢$

(٥٩) أوجد نها $\frac{\sqrt{س+٢} - ٢}{\sqrt{س+٧} - ٣}$ (س ← ٢) $\{ \frac{٣}{٢} \}$

إرشاد : انطق البسط والمقام

(٦٠) إذا كان ق (س) = $\sqrt{س}$ ، س > صفر ، هـ (س) = $س^٢ - ٤$

اوجد نها (ق ∘ هـ) (س) (س ← ٣) $\{ \sqrt{٥} \}$

(٦١) أوجد :

«١» نها $\frac{س}{|س|}$ (س ← ٠) وكذلك نها $\frac{|س|}{س}$ (س ← ٠)

«٢» نها $\frac{س}{[س]}$ (س ← ٠) وكذلك نها $\frac{[س]}{س}$ (س ← ٠) {غير موجودة للجميع}

(٦٢) أوجد نها $\frac{\sqrt{س+١} - ٥}{س - ٣}$ (س ← ٢) $\{ \sqrt{٢} - ٥ \}$

(٦٣) أوجد :

«١» نها $\frac{ع^٤ - ٢٥٦}{ع + ٤}$ (ع ← - ٤) {- ٢٥٦}

«٢» نها $\frac{\sqrt{٤ - س} - \sqrt{س}}{٢ - س}$ (س ← ٢) $\{ \sqrt{٢} \}$

«٣» نها $\frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{س+هـ}}{هـ}$ (هـ ← ٠) $\{ \frac{١}{س^٢} \}$

«٤» نها $\frac{س^٣ - ٢٧}{س - ٣}$ (س ← ٣) {٢٧}

(٦٤) إذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٢س + ٣ &، س > ١ \\ س + ١ &، س \le ١ \end{cases}$

أوجد نها ق (٢ − س) {٢}
س ← ١⁻

إرشاد: ضع ص = ٢ - س

(٦٥) أوجد نها $\dfrac{\sqrt[٣]{س} - ١}{\sqrt[٢]{س} - ١}$ $\{\dfrac{٢}{٣}\}$

إرشاد: ضع س = $ص^{٢×٣}$ = $ص^{٦}$ حاصل ضرب الأدلة

(٦٦) بين أن:

«١» نها (س ← أ) $\dfrac{جا ٢س - جا ٢أ}{س - أ}$ = ٢ جتا أ

إرشاد: تحويل إلى ضرب في البسط

«٢» نها (س ← ٠) $\dfrac{ظتا (\frac{\pi}{٢} - س)}{جا س}$ = ١

إرشاد: ظتا ($\frac{\pi}{٢}$ - س) = ظا س

«٣» نها (س ← ص) $\dfrac{٢ جا (س - ص)}{س^{٢} - ص^{٢}}$ = $\dfrac{١}{ص}$

«٤» نها (س ← π) $\dfrac{س^{٢} جتا س + \pi^{٢}}{س - \pi}$ = - ٢π

إرشاد: نطرح $\pi^{٢}$ جتا س ثم نضيفها في البسط ونحلل

(٦٧) ابحث في تصال ق (س) $\dfrac{|س^{٢} - ٥س + ٦|}{س - ٣}$ عند س = ٣ {غير متصل}

(٦٨) أوجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(س + هـ)^٢ - س^٢}{هـ}$ {٢ س}

(٦٩) $\lim_{س \to ٤} \frac{٣س - ٤٨}{٥س - ٢٠}$ ، و $\lim_{س \to -١} \frac{س^٢ + س}{س + ١}$

(٧٠) أوجد:

«١» $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٦س - ٣}{س(١ - ٢س)}$ {- ٦}

«٢» $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س} - \sqrt{٢}}{س^٢ - ٢س}$ $\{\frac{١}{٤\sqrt{٢}}\}$

إرشاد: تحليل أو انطاق

«٣» $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{س} + \frac{١}{\sqrt[٣]{س}}}{\sqrt[٣]{س} - \frac{١}{\sqrt[٣]{س}}}$ {- ١}

إرشاد: توحيد المقامات في البسط والمقام

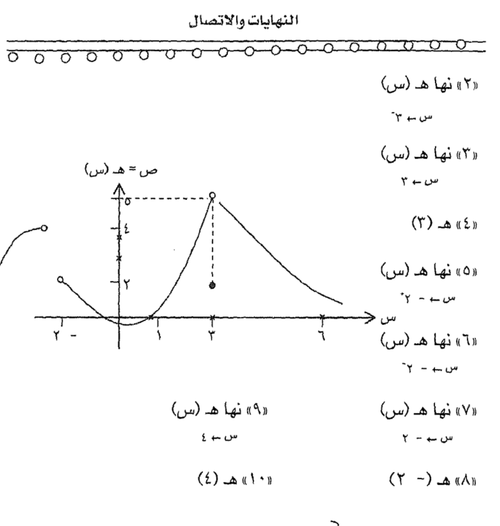
«٤» $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + س} - \sqrt{١ - س}}{س}$ {١}

«٥» $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^٢ - ٩}}{س - ٣}$ {غير موجودة}

إرشاد: انطبق البسط ثم حلل علماً أن المرافق هو $\sqrt{س^٢ - ٩}$ نفسه

(٧١) اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى هـ (س) أجب عما يلي:

«١» $\lim_{س \to ٣^+}$ هـ (س)



«٢» نها هـ (س)
س ← ٣^-

«٣» نها هـ (س)
س ← ٣

«٤» هـ (٣)

«٥» نها هـ (س)
س ← - ٢^+

«٦» نها هـ (س)
س ← - ٢^-

«٧» نها هـ (س)
س ← - ٢

«٨» هـ (- ٢)

«٩» نها هـ (س)
س ← ٤

«١٠» هـ (٤)

(٧٢) إذا كان ق (س) = { ١ − $س^٢$ ، س < ٠
١ + $س^٢$ ، س ≥ ٠

ابحث في اتصاله عندما س = صفر

(٧٣) إذا كان ق (س) = { $س^٢$ − ١ ، س < ٢
٥ ، س = ٢
$\sqrt{س + ٧}$ ، س > ٢

أوجد نها ق(س) ، ق (٢) ، هل ق(س) متصل عند س = ٢ ؟
س ← ٢

(٧٤) أوجد نها $\frac{س^٢ + س}{س^٢ - ١}$
س ← - ١

(٧٥) أوجد:

«١» $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤}{س^٣ - ٨}$

«٢» $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤}$

«٣» $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س^٢ - ٦س + ٩}$ {غير موجودة}

«٤» $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٦س + ٩}{س - ٣}$ {صفر}

(٧٦) إذا كان ق (س) = $\begin{cases} س^٢ & ، س < ٣ \\ ٩ & ، س = ٣ \\ ٢س + ٣ & ، س > ٣ \end{cases}$

عند س = ٣ {متصل}

(٧٧) إذا كان ق(س) = $س^٢ - ٤س$ أوجد:

«١» $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١}$

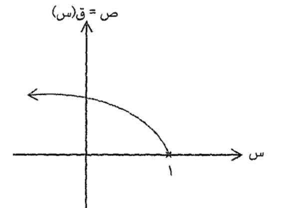
«٢» $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢}$

«٣» $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣}$

«٤» $\lim_{س \to ٤} \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤}$

(٧٨) إذا كان منحنى ق(س) = $\sqrt{1 - س}$ هو الشكل المجاور

أوجد :



$\lim_{س \to 1^{+}}$ ق(س)

$\lim_{س \to 1^{-}}$ ق(س)

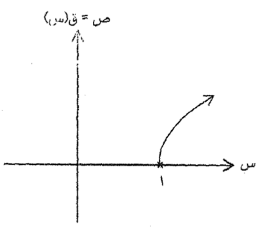
$\lim_{س \to 1}$ ق(س)

{غير موجودة ، صفر ، غير موجودة}

إرشاد : مجال ق(س) هو ١ - س ≥ صفر ← س - ١ ≤ صفر

(٧٩) إذا كان منحنى ق(س) = $\sqrt{س - 1}$ هو الشكل المجاور

أوجد :



$\lim_{س \to 1^{+}}$ ق(س)

$\lim_{س \to 1^{-}}$ ق(س)

$\lim_{س \to 1}$ ق(س)

إرشاد : مجال ق(س) هو س - ١ ≥ صفر

(٨٠) احسب:

«١» $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٤ - ٤س + س^٢}}{س^٢ + س - ٦}$ {غير موجودة}

إرشاد: $\sqrt{٤ - ٤س + س^٢} = \sqrt{(٢ - س)^٢} = |س - ٢|$ أو $|٢ - س|$

«٢» $\lim_{س \to ١} \sqrt{\frac{س - ١}{س + ١}}$

«٣» $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} [\![١ + ٢س]\!]$

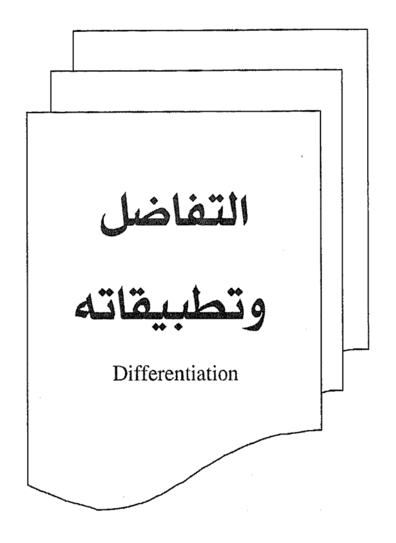
«٤» $\lim_{س \to ١^-} |١ - س^٢|$

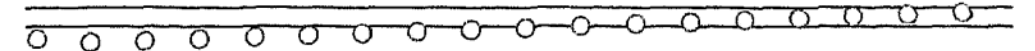
(٨١) إذا كان ق (س) = $\begin{cases} \frac{٣س^٢ - ٥ س + ٢}{٢ س^٢ - ٣س + ١} & ، س > ١ \\ ب & ، س \leq ١ \end{cases}$

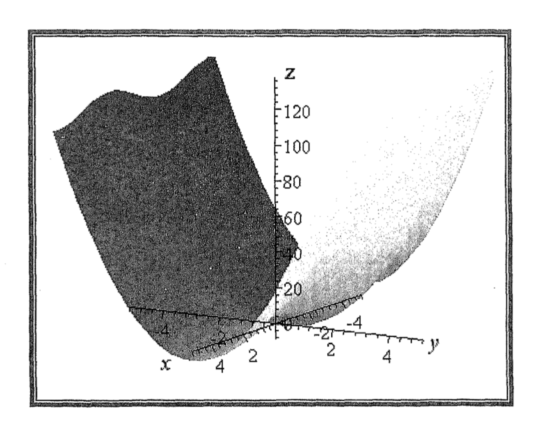
ما قيمة ب لتكون $\lim_{س \to ١}$ ق(س) موجودة {١}

(٨٢) أوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{٥ (٢ + هـ)^٣ - ٤٠}{١٠ هـ}$ {٦}

إرشاد: فك القوس


التفاضل
وتطبيقاته
Differentiation




z
120
100
80
60
40
20
-4
-2
2
4
y
x
4
2
-4
-2

يُفسر التفاضل رياضياً بأنه عملية إيجاد المشتقة الأولى للاقتران والتي ترتبط بالمماس وميله في الهندسة التحليلية ولتوضيح هذا المفهوم نبدأ بمناقشة متوسط التغير لصلته الوثيقة بعملية الاشتقاق أو عملية إيجاد المشتقة الأولى (لبنة البناء في حساب التفاضل) هكذا:

(٢١ – ١) متوسط التغير Average of Change

التغير سمة من سمات الحياة الملازمة لها باستمرار، نلحظها هنا وهناك؛ فالإنسان بعد أن يولد ينمو ويترعرع ويتغير من حيث السن والوزن والشكل، فسبحان الذي لا يتغير كونه وحده الله.

ولكننا سنناقش التغير بطرق رياضية بحته كما يلي:

(١) التغير في س، هو الفرق بين قيمتي المتغير س (المتغير المستقل في الاقتران ص = ق(س)) عندما يزداد أو يقل من $س_١$ إلى $س_٢$ ويرمز له بالرمز Δ س ويقرأ دلتا س أي أن:

Δ س = $س_٢$ - $س_١$ ⟸ (١)

وهذا الفرق عدد حقيقي سواء أكان موجب أو سالب أو كسر (عدد نسبي) أو جذر:

(٢) التغير في ص، هو الفرق بين قيمتي المتغير ص (المتغير التابع في الاقتران ص = ق(س) عندما يزداد أو يقل كونه يتبع في تغيره المتغير المستقل س، أي أن:

Δ ص = $ص_٢$ - $ص_١$ ⟸ (٢)

ولما كان ص = ق(س) فإن

$\text{ص}_1 = \text{ق}(\text{س}_1)$ ، $\text{ص}_2 = \text{ق}(\text{س}_2)$

$\therefore \Delta\text{ص} = \text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1) \Longleftarrow$ (٣)

(٣) من المعلوم أن $\dfrac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$ هو خارج قسمة التغير في ص (Δ ص) على التغير في س (Δ س) أي أن:

$$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$ (من (١) ، (٢) السابقين)

وهذا ما يسمى بمتوسط التغير كما في الشكل أي أن:

$$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

والخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ}_1\text{أ}_2}$

يسمى القاطع Asecant Line

حيث يقطع منحنى

الاقتران ق(س) في

النقطتين أ_1 ، أ_2

وإن $\measuredangle\,\text{ي}_2$ هي الزاوية التي يصفها القاطع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

أي هي الزاوية المحصورة بين القاطع $\text{أ}_1\text{أ}_2$ ومحور السينات.

ولمّا كانت $\measuredangle\,\text{ي}_2 = \measuredangle\,\text{ي}_1$ أو العكس (بالتناظر)

وكذلك $\text{ظا ي}_1 = \dfrac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$ (المثلث $\text{أ}_2\text{جـ}\text{أ}_1$ قائم الزاوية)

وبما أن ظا ي_2 = ميل القاطع (كما هو واضح من الهندسة التحليلية)

$$\text{فإن}\quad \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \text{ميل القاطع} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} \quad \Longleftarrow \quad (٤)$$

هذه العلاقة تترجم معنى متوسط التغير هندسياً والذي هو ميل القاطع أ_1 أ_2

أي أن $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ = ظا ي = ميل القاطع (هذا هو المعنى الهندسي).

وهناك معنى آخر لمتوسط التغير $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ وهو المعنى الفيزيائي والدال على السرعة المتوسطة ورمزها عَ.

فعندما يتحرك جسيم فإن المسافة التي يقطعها ترتبط بالزمن، لذا فإنه يتحرك تبعاً للاقتران ل = ف (ن) وإذا ما تغيرت ن أثناء حركته من ن_1 إلى ن_2 فإن ف تتغير أيضاً وتبعاً لذلك من ف (ن_1) إلى ف (ن_2) حيث ن الزمن، ف (ن) المسافة وعندها.

$$\text{عَ} = \frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}(\text{ن}_2) - \text{ف}(\text{ن}_1)}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1} \quad \Longleftarrow \quad (٥)$$

السرعة المتوسطة

⇦مثال: إذا كان ق (س) = س^2، وكانت س_1 = ٢ إلى س_2 = ٣

احسب $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{ب}}$:

الحل:

Δ س = س_2 - س_1 = ٣ - ٢ = ١

Δ ص = ق (س_2) – ق (س_1) = ق (٣) – ق (٢) = ٣^2 – ٢^2 = ٩ - ٤ = ٥

$\therefore \quad \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٥}{١} = ٥$

هذا ويمكن إيجاد $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ مباشرة من القانون:

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(٣) - ق(٢)}{٣ - ٢} = \frac{٣^٢ - ٢^٢}{١}$$

$$= \frac{٩ - ٤}{١} = \frac{٥}{١} = ٥$$

⇦مثال: إذا كان منحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطتين أ(٤، ٦)، ب (٢، ٣) أوجد متوسط التغير للاقتران في الفترة [٢ ، ٤].

الحل: بما أن متوسط التغير $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = م القاطع = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

فإن $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{فرق الصادين}{فرق السيني}$

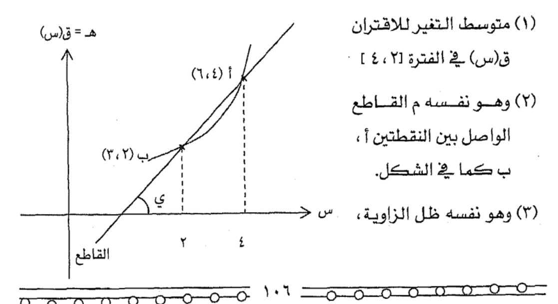
$$= \frac{٦ - ٣}{٤ - ٢} = \frac{٣}{٢}$$

وهذا العدد الحقيقي ($\frac{٣}{٢}$) هو:

(١) متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [٢ ، ٤]

(٢) وهو نفسه م القاطع الواصل بين النقطتين أ ، ب كما في الشكل.

(٣) وهو نفسه ظل الزاوية،



ظا ي التي يصنعها القاطع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

أي أن ظا ي = $\frac{٣}{٢}$ = ١,٥٠٠

من الآلة الحاسبة: فإن ∢ ي = ٥٦°

أي أن القاطع يصنع زاوية قياسها ٥٦° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

⇦مثال: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسيم أثناء سقوطه إلى أسفل تعطى بالعلاقة ف (ن) = ٣٠ ن − ٥ ن^{٢} حيث ف المسافة بالأمتار ن الزمن بالثواني

احسب سرعته المتوسطه في الفترة [٢، ٣]

↓ ن$_{١}$ ، ن$_{٢}$ ↓

الحل:

بما أن عَ = $\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}}$ = $\frac{\text{ف}(\text{ن}_{٢}) - \text{ف}(\text{ن}_{١})}{\text{ن}_{٢} - \text{ن}_{١}}$

فإن عَ = $\frac{\text{ف}(٣) - \text{ف}(٢)}{٣ - ٢}$ = $\frac{\{٣٠(٣) - ٥(٣)^{٢}\} - \{٣٠(٢) - ٥(٢)^{٢}\}}{١}$

= ٩٠ − ٤٥ − ٦٠ + ٢٠

= ٥ م/ ث السرعة المتوسطة.

(٢١ − ٢) المشتقة الأولى The First Derivative

والآن سنناقش عملية إيجاد المشتقة الأولى:

والمشتقة الأولى من الأدوات الأساسية في الرياضيات والمدخل المنطقي السليم لدراسة التغير والتغيرات التي تحدث في الاقترانات الحقيقية وتطبيقاتها المنوعة والمستخدمة في الأبحاث العلمية المتقدمة.

نبدأ من حيث انتهينا أي بمتوسط التغير:

بما أن $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$ كما مر سابقاً

ولما كانت Δ س= $س_2 - س_1$ حسب مفهوم التغير ← فإن $س_2 = س_1 + \Delta$ س

عندها يصبح $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{(ق(س_1 + جـ س) - ق(س_1)}{\Delta س}$ ، Δ س $\neq$ صفر (هذا الشرط تحمله جـ س في طبيعتها كونها التغير)

وإذا رمزنا للكمية Δ س بالرمز هـ للسهولة فقط.

فإن $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_1 + هـ) - ق(س_1)}{هـ}$ ، هذا هو متوسط التغير بصورة أخرى

ولما كانت المشتقة الأولى (ورمزها قَ (س) أو $\frac{د ص}{د س}$ أو صَ أو $\frac{د}{د س}$)

للاقتران ص = ق (س) على الفترة [أ ، ب] هي اقتران آخر قيمته عند أي نقطة مثل $س_1$ هي حسب هذين التعريفين:

(١) قَ $(س_1)$ = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{ق(س_1 + هـ) - ق(س_1)}{هـ}$ وكأنها نهاية متوسط التغير، شرط أن تكون النهاية موجودة.

«هذا التعريف للمشتقة الأولى عند نقطة»

(٢) وبشكل عام

قَ (س) = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$ هذا التعريف للمشتقة الأولى بشكل عام.

وتعريف المشتقة سواء أكان بشكل عام قَ (س) أو عند نقطة قَ ($س_1$) بالغ الأهمية كون عملية إيجاد قَ (س) ، قَ ($س_1$) بواسطة هذا التعريف هي ما يُطلق عليها اسم التفاضل، فالتفاضل بإيجاز شديد:

«هو عملية إيجاد المشتقة الأولى من التعريف أو من المبادئ الأولية كما يحلو للبعض أن يُسميه» كما في الأمثلة التالية:

⇦مثال: بواسطة التعريف أوجد قَ (س) للاقتران ق (س) = $س^2$

هنا نستخدم التعريف العام للمشتقة الأولى هكذا:

$$قَ (س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق (س + هـ) - ق (س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{(س + هـ)^2 - (س)^2}{هـ}$$ (نعوض أولاً (س + هـ) بدلاً من س ثم ثانياً س بدلاً من س)

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{س^2 + ٢ س هـ + هـ^2 - س^2}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{٢ س هـ + هـ^2}{هـ}$$ (هنا انقلبت عملية الاشتقاق إلى عملية إيجاد النهاية)

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ (٢ س + هـ)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} (٢س + هـ) = ٢س$$

⇦مثال: إذا كان ق(س) = $\sqrt{س}$ أوجد قَ (٩) بواسطة التعريف

هنا نستخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة هكذا:

$$\text{ق}'(\text{س}_{1}) = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}_{1} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_{1})}{\text{هـ}}$$

$$\text{فإن ق}'(٩) = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(٩ + \text{هـ}) - \text{ق}(٩)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\sqrt{٩ + \text{هـ}} - \sqrt{٩}}{\text{هـ}}$$

وبانطاق البسط (كما مر في موضوع النهايات)

$$\text{فإن ق}'(٩) = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\sqrt{٩ + \text{هـ}} - \sqrt{٩}}{\text{هـ}} \times \frac{\sqrt{٩ + \text{هـ}} + \sqrt{٩}}{\sqrt{٩ + \text{هـ}} + \sqrt{٩}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{٩ + \text{هـ} - ٩}{\text{هـ}(\sqrt{٩ + \text{هـ}} + \sqrt{٩})}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}(\sqrt{٩ + \text{هـ}} + \sqrt{٩})} = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{١}{(\sqrt{٩ + \text{هـ}} + \sqrt{٩})}$$

$$= \frac{١}{\sqrt{٩} + \sqrt{٩}} = \frac{١}{٣ + ٣} = \frac{١}{٦}$$

(٢١ — ٣) قواعد الاشتقاق Differentiation Rules

إن عملية إيجاد المشتقة الأولى للاقترانات الحقيقية باستخدام التعريف أو من المبادئ الأولية تحتاج إلى وقت طويل وجُهد عسير لذا فإننا سنلجأ إلى قواعد الاشتقاق لنوفر الوقت والجهد.

سنورد هذه القواعد بلا براهين وإنما نوضحها بالأمثلة العددية والتفسير اللغوي السليم كما يلي:

قاعدة ١ إذا كان ق (س) = جـ ، جـ $\in$ ح

فإن قَ (س) = صفر

والتفسير اللغوي للقاعدة: مشتقة الاقتران الثابت تساوي صفر

⇦مثال: إذا كان ق (س) = ٧ ⟵ قَ (س) = صفر

ق (س) = - أ ⟵ قَ (س) = صفر

ق (س) = π ⟵ قَ (س) = صفر وهكذا

قاعدة ٢ إذا كان ق (س) = س$^{؟}$ ، حيث س ≠ صفر، ؟ ∈ ح

فإن قَ (س) = ؟ س$^{؟ - 1}$

وهذا هو القانون العام لتفاضل أو اشتقاق الاقترانات الجبرية.

⇦مثال: إذا كان ق (س) = س^{2} ⟵ فإن قَ (س) = ٢ س ، ؟ ∈ ط

وإذا كان ق (س) = س$^{-3}$ ⟵ فإن قَ(س) = - ٣ س$^{-4}$ ، ؟ ∈ ص

وإذا كان ق (س) = س$^{\frac{1}{2}}$ ⟵ فإن قَ(س) = $\frac{1}{2}$ س$^{\frac{1}{2} - 1}$ ؟

= $\frac{1}{2}$ س$^{-\frac{1}{2}}$ ، ؟ ∈ ك

وإذا كان ق (س) = $\frac{1}{س^{5}}$ نبسطه هكذا ق (س) = ١ س$^{-5}$

فإن قَ (س) = - ٥ س$^{-6}$ = $\frac{-5}{س^{6}}$ لرفع س^{5} من المقام إلى البسط تصبح س$^{-5}$ ثم ننزل س$^{-6}$ إلى المقام لتصبح $\frac{-5}{س^{6}}$

وإذا كان ق (س) = $\sqrt[3]{س}$ = س$^{\frac{1}{3}}$ حيث يتغير الجذر إلى أسس نسبية حيث الدليل ٣ يصبح مقام للأسس النسبي ($\frac{1}{3}$)

فإن قَ (س) = $\frac{1}{3}$ س$^{-\frac{2}{3}}$ = $\frac{1}{3 س^{\frac{2}{3}}}$ = $\frac{1}{3\sqrt[3]{س^{2}}}$ إعادة الجذر كما في السؤال.

قاعدة ٣ إذا كان ق (س) = جـ . ل (س) فإن قَ (س) = جـ . لَ (س)

والتفسير اللغوي للقاعدة: مشتقة حاصل ضرب عدد حقيقي × اقتران = حاصل ضرب العدد الحقيقي × مشتقة الاقتران.

⇦مثال: إذا كان ق (س) = ٥ س^{٤} فإن قَ (س) = ٥ × ٤ س^{٣} = ٢٠ س^{٣}

وإذا كان ق (س) = ٥ س^{١} فإن قَ (س) =٥ × ١ س^{٠} = ٥ × ١ = ٥

وكأن سَ تطير عند الاشتقاق ويبقى المعامل فقط

وكذلك

(٦س)َ = ٦ ثم (- ٧س)َ = - ٧ وهكذا

وبشكل عام فإن (أس)َ = أ بعد أن تطير س إلى حيث لا عودة إلا عند التكامل كما سيرد في وقته.

والتفسير اللغوي للقاعدة:

مشتقة عدد ثابت × س = العدد الثابت فقط

وبشكل أوضح (عدد حقيقي × س)َ = المعامل وهو العدد الحقيقي

فإذا كان ق(س) = س = ١س فإن قَ (س) = ١ فقط.

قاعدة ٤ **مشتقة مجموع اقترانين أو فرقهما**

إذا كان ق (س) = ل (س) ± م (س)

فإن قَ (س) = لَ (س) ± مَ (س)

والآن يمكن التعميم:

إذا كانت الاقترانات ق$_{١}$(س)، ق$_{٢}$(س)، ق$_{٣}$(س)، . . . ، ق$_{ل}$(س) قابلة

الاشتقاق عند النقطة س، أو بشكل عام عند س فإن:

$\{$(ق (س) + ق$_{٢}$(س)+ ق$_{٣}$(س)+. . . + ق $_{ن}$ (س)$\}$ ´ = ق$_{١}$ (س) + ق$_{٢}$(س)+

ق$_{٣}$(س) + . . . + ق$_{ن}$(س)

والتفسير اللغوي:

مشتقة المجموع أو الفرق = مجموع المشتقات أو فرقها على التوالي.

واعتماداً على هذه القاعدة بالذات نستطيع إيجاد قَ(س) لكثيرات الحدود كما يلي:

⇦مثال: إذا كان ق (س) = س^{٣} + س^{٢} + س +١

فإن قَ (س) = ٣ س^{٢} + ٢ س + ١

وإذا كان ق (س) = ٤ س^{٢} + ٥ س + ٧

فإن قَ (س) = ٨ س + ٥ وهكذا

قاعدة ٥ مشتقة حاصل ضرب اقترانين:

إذا كان ق (س) = ل (س) . م (س) فإن:

قَ (س) = ل (س) مَ (س) + م (س) لَ (س)

والتفسير اللغوي للقاعدة:

مشتقة حاصل ضرب اقترانين = الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

⇦مثال: إذا كان ق (س) = (٢س + ١) (٣ – س^{٢}) أوجد قَ (س)، قَ (– ١)

قَ (س) = (٢س + ١) (– ٢س) + (٣ - س^{٢}) (٢)

$= -4$ س$^2 - 2$س $+ 6 - 2$ س$^2 = -6$س$^2 - 2$س $+ 6$

ومنها قَ $(-1) = -6(-1)^2 - 2(-1) + 6 = -6 + 2 + 6 = 2$

قاعدة ٦ **مشتقة خارج قسمة اقترانين**

أو مشتقة الاقتران النسبي (بشكل خاص)

ليكن ق (س) $= \frac{\text{ل (س)}}{\text{م (س)}}$ ، م (س) $\neq$ صفر

فإن قَ (س) $= \frac{\text{م (س)} \times \text{لَ (س)} - \text{ل (س)} \times \text{مَ (س)}}{(\text{م (س)})^2}$

التفسير اللغوي للقاعدة:

مشتقة خارج قسمة اقترانين $= \frac{\text{(المقام) (مشتقة البسط) − (البسط) (مشتقة المقام)}}{\text{(المقام)}^2}$

⇦مثال: إذا كان ق (س) $= \frac{\text{س} + 1}{\text{س} - 1}$ أي $\neq 1$ أوجد قَ (س)، قَ (٢)

قَ (س) $= \frac{(\text{س} - 1)(1) - (\text{س} + 1)(1)}{(\text{س} - 1)^2} = \frac{\text{س} - 1 - \text{س} - 1}{(\text{س} - 1)^2}$

$= \frac{-2}{(\text{س} - 1)^2}$ ، س $\neq 1$

قَ (٢) $= \frac{-2}{(2 - 1)^2} = \frac{-2}{(1)^2} = -2$

هذا ويمكن استخلاص النتيجة التالية:

إذا كان ق (س) $= \frac{\text{أ}}{\text{ل (س)}}$ حيث أ ثابت

إذا كان ق (س) $= \frac{\text{ل (س)} \times \text{صفر} - \text{أ} \times \text{لَ (س)}}{(\text{ل (س)})^2} = \frac{-\text{أ لَ (س)}}{(\text{ل (س)})^2}$

والتفسير اللغوي للنتيجة: مشتقة خارج قسمة عدد ثابت على اقتران

$= \frac{\text{سالب الثابت} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$

⇦مثال: إذا كان ق (س) = $\frac{٢}{س^{٢}}$ أوجد قَ (س)

$قَ (س) = \frac{\text{سالب الثابت} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}} = \frac{-٢ \times (س^{٢})'}{س^{٤}}$

$= \frac{-٢ \times ٢ س}{س^{٤}} = \frac{-٤ س}{س^{٤}} = \frac{-٤}{س^{٣}}$

وهذه النتيجة لا يفضل الاعتماد عليها بل يجب استخدام القانون لخارج قسمة اقترانين وهذا أفضل من حفظ النتائج العديدة.

قاعدة ٧ مشتقة اقتران القيمة المطلقة

ليكن ق (س) = | س | أوجد قَ (س)

يُفضل إعادة تعريفه هكذا:

$$ق (س) = \begin{cases} -س &، س < صفر \\ س &، س \geq صفر \end{cases}$$

وباستخدام القاعدة ق (س) = سⁿ للطرفين:

$$قَ (س) = \begin{cases} -١ &، س < صفر \\ \text{غير موجودة} &، س = صفر \ \{\text{لأن المشتقة من اليسار} \neq \text{المشتقة من اليمين}\} \\ ١ &، س > صفر \end{cases}$$

أي أن قَ (٠) غير موجودة

لأن $قَ_{+} (٠) \neq قَ_{-} (٠)$

مع ملاحظة أن ق (س) متصل عند س = صفر وهذا يؤكد القاعدة القائلة ليس كل الاقترانات المتصلة قابلة للاشتقاق وبدوره يؤيد عدم وجود قَ ($س_{١}$) عند

الزوايا والرؤوس المدببة.

⇦مثال: إذا كان ق (س) = | س^{٢} - ١ | أوجد قَ (س)، قَ (- ١)، قَ (١)، قَ (٥)، قَ (- ٥)

بعد إعادة تعريفه كما مر في موضوع الاقترانات فإن:

علماً بأن جذريه س^{٢} - ١ = صفر، (س + ١) (س - ١) = صفر، س = - ١، ١

ق (س) = { س^{٢} - ١ ، س < - ١
١ - س^{٢} ، - ١ ≤ س < ١
س^{٢} - ١ ، س ≥ ١ }

نفس إشارة أ | عكس إشارة | نفس إشارة أ

∞ - ++++ ١ - - - - - - ١ ++++ ∞

قَ (س) = { ٢س ، س < - ١
غير موجودة ، س = - ١
- ٢س ، - ١ < س < ١
غير موجودة ، س = ١
٢س ، س > ١ }

ومنها قَ (س) غير موجودة عند صفريه - ١، ١

قَ (٥) = ٢ (٥) = ١٠ لأن ٥ > ١

قَ (- ٥) = ٢ (- ٥) = - ١٠ لأن - ٥ < - ١ وهكذا

ملحوظة:

إذا كان مميز الاقتران ق (س) = | أ س^{٢} + ب س + جـ | موجباً فإنه لا يوجد له مشتقة عند أصفاره كما في المثال السابق وإذا لم يكن من السهل تحليل الاقتران أ س^{٢} + ب س + جـ لمعرفة أصفاره فإننا نعوض القيمة المطلوب عندها إيجاد قَ (س$_{١}$)

مباشرة في الاقتران دون قيمته المطلقة فإذا كان الجواب:

موجباً نأخذ القاعدة الموجبة في الاشتقاق

وإذا كان سالباً نأخذ القاعدة السالبة في الاشتقاق

كما في المثال:

ليكن ق (س) = | س^{٢} + س - ٥ | اوجد قَ (١) ، قَ (٢)

قَ (س) = { ٢س + ١ ، المشتقة الموجبة حيث (س^{٢} + س - ٥)َ = ٢س + ١
- ٢س - ١ ، المشتقة السالبة حيث (- س^{٢} - س + ٥)َ = - ٢س - ١

لإيجاد قَ (١) نعوض ق (١) = (١)^{٢} + ١ - ٥ = - ٣ نعوضها في المشتقة السالبة

∴ قَ (١) = - ٢ (١) - ١ = - ٣

لإيجاد قَ (٢) نعوض ق (٢) في الاقتران، ق (٢) = ٢^{٢} + ٢ - ٥ = ١

لذلك قَ (٢) = ٢ (٢) = ١ نعوضها في المشتقة الموجبة.

قاعدة ٨ مشتقة صحيح

مشتقة صحيح س أي مشتقة ق (س) = ⟦ س ⟧

تستطيع إيجاد قَ(س) بلا إعادة التعريف ودون الرسم البياني للاقتران هكذا.

إذا كان ق (س) = ⟦ س ⟧ فإن قَ (س$_{١}$) = { صفر ، لكل س$_{١}$ ∌ ص عدد غير صحيح
غير موجودة ، لكل س$_{١}$ ∋ ص عدد صحيح

⇦مثال: ليكن ق (س) = ⟦ س ⟧ أوجد قَ(٢) ، قَ(- $\frac{٧}{٢}$)

ق (٢) = [٢] وهذا عدد صحيح ← فإن قَ(٢) غير موجودة

ق (- $\frac{٧}{٢}$) = [- $\frac{٧}{٢}$] وهذا عدد غير صحيح ← فإن قَ(- $\frac{٧}{٢}$) = صفر

ملحوظة:

إذا كان الاقتران المطلوب اشتقاقه يتكون من أكثر من اقتران، كحاصل ضرب اقترانين أو خارج قسمة اقترانين فإننا لا نطبق ما سبق اشتقاقه بل نعيد التعريف هكذا

مثال: ليكن ق (س) = ٢ س . [س + ١]، أو قَ ($\frac{١}{٢}$)، قَ (٢)

[س + ١] =
- ٠ ، ٠ ≤ س < ١
- ٢ ، ١ ≤ س < ٢
- ٣ ، ٢ ≤ س < ٣

يأخذ الفترة [٠ ، ٣]

ومنه ٢ س . [س + ١] =
- صفر ، ٠ ≤ س < ١
- ٤ س ، ١ ≤ س < ٢
- ٦ س ، ٢ ≤ س < ٣

قَ (س) =
- غير موجودة ، س = صفر
- صفر ، ٠ < س < ١
- غير موجودة ، س = ١
- ٤ ، ١ < س < ٢
- غير موجودة ، س = ٢
- ٦ ، ٢ < س < ٣

ومنها قَ ($\frac{١}{٢}$) = صفر

قَ (٢) = غير موجودة

قاعدة ٩ مشتقة الجذر التربيعي

مشتقة الجذر التربيعي فقط دون غيرها من الجذور كحالة خاصة الآن

واشتقاق بقية الجذور سيأتي فيما بعد:

إذا كان ق (س) = $\sqrt{\text{هـ (س)}}$ ، هـ (س) > صفر

فإن قَ (س) = $\frac{\text{هـَ (س)}}{٢\sqrt{\text{هـ (س)}}}$ ، هـ (س) > صفر

التفسير اللغوي للقاعدة:

مشتقة الجذر التربيعي = $\frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{\text{مشتقة الجذر نفسه}}$

⇦ مثال: إذا كان ق (س) = $\sqrt{\text{س}^٢ - ١}$ س ∈ ح -] - ١ ، ١ [

قَ (س) = $\frac{٢\text{ س}}{٢\sqrt{\text{س}^٢ - ١}}$ = $\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^٢ - ١}}$ نفس لبمجال

ومنه ق (٣) = $\frac{٣}{\sqrt{٩ - ١}}$ = $\frac{٣}{\sqrt{٨}}$ = $\frac{٣}{٢\sqrt{٢}}$ وهكذا

مع ملاحظة أن المشتقة غير موجودة في الفترة [- ١ ، ١] لأن الفترة ليست في مجاله حتى ولو كانت الأطراف - ١ ، ١ موجودتان في المجال فإن قَ (- ١)، قَ (١) غير موجودتان كونهما عند الأطراف.

قاعدة ١٠ المشتقات العليا Higher Derivaties

بما أن قَ (س) اقتران ⟵ إذن يمكن اشتقاقه كما يلي:

(قَ (س))َ = مشتقة المشتقة الأولى = المشتقة الثانية

ونرمز لها بالرموز: قً (س)، $\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{د س}^٢}$ ، $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ ($\frac{\text{دص}}{\text{د س}}$) ، صً

وبما أ ، قً (س) ⟵ إذن يمكن اشتقاقه كما يلي:

(قً (س))َ = قَّ (س) ، . . .

هكذا يمكن الاستمرار بالاشتقاق للاقترانات الناتجة حتى نصل إلى

المشتقة النونية ورمزها.

$$ص^{(ن)} = \frac{د^{ن}ص}{د\,س^{ن}} = ص^{(ن)}(س)$$ حيث ن عدد صحيح موجب

ومثل هذه المشتقات تسمى المشتقات العليا وعملية الاشتقاق تسمى الاشتقاق المتعاقب.

⇦مثال: إذا كان ق (س) = س^{٣} + س^{٢} + س + ١

أوجد قَ (س)، قً (س)، قٌ (س)

قَ (س) = س^{٣} + س^{٢} + ١

قً (س) = ٦س + ٢

قٌ (س) = ٦

وقيم جميع المشتقات الأخرى هي الأصفار.

قاعدة ١١ **مشتقة الاقتران المركب** Derivetive of composite Function

بواسطة قاعدة السلسلة By The Chain Rule

هنالك ٣ حالات لاستخدام قاعدة السلسلة هي:

أولاً: عندما لا يرتبط المتغير ص بالمتغير س ارتباطاً مباشراً، كان يكون هناك متغيراً آخر مثل ع يربط بين المتغيرين س، ص هكذا.

ص = ق (ع) ، ع = ق (س) حيث ع هو متغير وسيط يربط س بـ ص.

⇦مثال: إذا كانت ص = ع^{٢} + ع، ع = ٢س^{٣} + ٥س

أوجد $\frac{دص}{د\,س}$

هنا لا ارتباط مباشر بين س، ص إنما يوجد الوسيط ع لذا فإن

$$\frac{دص}{د س} = \frac{دص}{د ع} \times \frac{دع}{د س}$$

$$= (٢ع + ١)(٦س^٢ + ٥)$$

وبعد أن نعيد قيمة ع إلى ما تساويه بدلالة س

فإن $\frac{دص}{د س} = \{ ٢(٢س^٣ + ٥س) + ١ \} \{ ٦س^٢ + ٥ \}$

$$= (٤س^٣ + ١٠س + ١)(٦س^٢ + ٥)$$

ثانياً: عند وجود القوى والجذور في الاقترانات كما يلي:

ليكن ق (س) = ص = $(س^٢ + ٣ س - ١)^٧$ أوجد قَ (س) أو $\frac{دص}{د س}$

يمكن إيجاد قَ (س) بفك القوس $(س^٢ + ٣ س - ١)^٧$ أي ضربه بنفسه ٧ مرات مع أن الحل غير مستحيل بوجود نظرية ذات الحدين ولكنه متعب وطويل لذا فإننا نستخدم بدلاً منه قاعدة السلسلة هكذا:

نفرض ما بداخل القوس: $س^٢ + ٣ س - ١ = ع$

أي أن $ع = س^٢ + ٣ س - ١$

ومنه $ص = ع^٧$

ثم نستخدم قاعدة السلسلة: $\frac{دص}{د س} = \frac{دص}{د ع} \times \frac{دع}{د س}$

$$= (٧ع^٦)(٢س + ٣)$$

$$= ٧(س^٢ + ٣س - ١)^٦(٢س + ٣)$$

هذا ويمكن الحصول على الجواب مباشرة في حالة القوى و الجذور بعد

تحويلها إلى قوى

$\frac{\text{دص}}{\text{د س}}$ = مشتقة القوس × مشتقة ما بداخله

⇦مثال: إذا كانت ص = (٥ س^{٢} + ٤)^{٧} أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{د س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{د س}}$ = مشتقة القوس × مشتقة ما بداخله

= ٧ (٥ س^{٢} + ٤)^{٦} (١٠س)

⇦مثال: إذا كانت ص = $\sqrt[٥]{\text{٣س}^{٢} + ١}$ = (٣ س^{٢} + ١)$^{\frac{١}{٥}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{د س}}$ = مشتقة القوس × مشتقة ما بداخله

= $\frac{١}{٥}$ (٣ س^{٢} + ١)$^{\frac{-٤}{٥}}$ (٦س) = $\frac{\text{٦ س}}{\text{٥ (٣ س}^{٢} + ١)^{\frac{٤}{٥}}}$

= $\frac{\text{٦ س}}{\text{٥ } \sqrt[٥]{(\text{٣ س}^{٢} + ١)^{٤}}}$

ثالثاً: يمكن الاشتقاق على صورة تركيب اقترانين (كاقتران واحد مركب)

⇦مثال: ليكن ق (س) = س^{٢} ، هـ (س) = ٣ س + ٥

أوجد (ق ∘ هـ)َ (س)، (ق ∘ هـ)َ (٣)

الحل:

بما أن (ق ∘ هـ)َ (س) = قَ (هـ (س)) × هـَ (س)

فإن (ق ∘ هـ)َ (س) = قَ (٣س + ٥) (٣)

لكن قَ (س) = ٢س

∴ (ق ∘ هـ)َ (س) = ٢ (٣س + ٥) (٣) = ٦ (٣س +٥) = ١٨س + ٣٠

ومنها (ق ∘ هـ)َ (٣) = ١٨ (٣) + ٣٠ = ٥٤ + ٣٠ = ٨٤

وهناك حل ثاني مباشر دون الاعتماد على (ق ∘ هـ)َ (س) هكذا

(ق ∘ هـ)َ (٣) = قَ (هـ (٣)) × هـَ (٣)

= قَ (١٤) × (٣)

= ٢ (١٤) × ٣ = ٦ (١٤) = ٨٤

وهناك حل ثالث هكذا:

نركب (ق ∘ هـ)َ (س) ثم نشتقه كما يلي:

(ق ∘ هـ)َ (س) = ق (هـ (س)) = ق (٣س + ٥) = $(\text{٣س} + ٥)^{٢}$

ومنها (ق ∘ هـ)َ (س) = مشتقة القوس × مشتقة ما بداخله

= ٢ (٣س + ٥) (٣) = ٦ (٣س + ٥) = ١٨ س + ٣٠

ومنها (ق ∘ هـ)َ (س) = ١٨ (٣) + ٣٠ = ٨٤

قاعدة ١٢ مشتقة الاقتران الوسيط

والاقترانان الوسيطان يرتبطان معاً بمتغير واحد وهو المتغير ن كما يلي:

إذا كان ص = ق (ن)

س = ق (ن)

فإننا نسمي المتغير ن متغيراً وسيطاً، وإيجاد $\frac{\text{دص}}{\text{د س}}$ مباشرة يكون كالتالي:

$$\frac{\text{دص}}{\text{د س}} = \frac{\frac{\text{دص}}{\text{د ن}}}{\frac{\text{دس}}{\text{د ن}}} = \frac{\text{٣ ن}^{٢} - ١}{\text{٢ ن}}$$

وكأنه $\frac{\text{قَ (ن)}}{\text{هـَ (ن)}}$ باعتبارها حالة خاصة من قاعدة السلسلة

إذا كان ص = $\text{ن}^{٣}$ - ن ، س = $\text{ن}^{٢}$ – ١ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{د س}}$ ، $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{د س}} = \frac{\frac{\text{دص}}{\text{د ن}}}{\frac{\text{دس}}{\text{د ن}}} = \frac{\text{٣ ن}^{٢} - ١}{\text{٢ ن}}$

$$\frac{\text{د}^{2}\text{ص}}{\text{د س}^{2}} = \left(\frac{3\text{ن}^{2}-1}{2\text{ن}}\right)' \div \frac{\text{دس}}{\text{د ن}} \quad \text{باعتبار الاشتقاق إلى س = هـ (ن)}$$

$$= \frac{(2\text{ن})(6\text{ن}) - (3\text{ن}^{2}-1)(2)}{4\text{ن}^{2}} \div 2\text{ن}$$

$$\frac{12\text{ن}^{2} - 6\text{ن}^{2} + 2}{4\text{ن}^{2}} \times \frac{1}{2\text{ن}} = \frac{6\text{ن}^{2}+2}{8\text{ن}^{2}} = \frac{3\text{ن}^{2}+1}{4\text{ن}^{2}}$$

قاعدة ١٣ الاشتقاق الضمني واستخداماته Implicit Differentiation

هناك علاقات من الصعب كتابتها على الشكل ص = ق(س) بأي شكل من الأشكال ومثالها: $\text{ص}^{3} + \text{س}^{2} + \text{س ص} = \text{س}^{3}$ مثل هذه العلاقة تسمى علاقة ضمنية واشتقاقها الذي نلجأ إليه يسمى اشتقاق ضمني، لذا فالاشتقاق الضمني يُستخدم عندما يصعب الفصل بين المتغيرين س، ص لارتباطهما بعلاقة متينة ومعقدة، ولإيجاد $\frac{\text{دص}}{\text{د س}}$ من علاقة ضمنية نشتق كل حد بالنسبة إلى نفسه ثم بالنسبة إلى س وبعدها نجدها هكذا:

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{ص}^{2}) = 2\text{ص} \,.\, \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$$

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(5) = \text{صفر} \,.\, \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{صفر}$$

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\sqrt{\text{ص}}) = \frac{1}{2\sqrt{\text{ص}}} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$$

⇦مثال: إذا كان $\text{س}^{2} + \text{س ص} + \text{ص}^{2} = 16$ أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل:

$$2\text{س} + (\text{الأول} \times \text{مشتقة الثاني} + \text{الثاني} \times \text{مشتقة الأول}) + 2\text{ص}.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{صفر}$$

$$٢س + (س \times \frac{د ص}{د س}) + (ص \times ١) + ٢ص \cdot \frac{د ص}{د س} = صفر$$

$$س \cdot \frac{د ص}{د س} + ٢ص \cdot \frac{د ص}{د س} = -٢س - ص$$

$$\frac{د ص}{د س} (س + ٢ص) = -٢س - ص$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{-٢س - ص}{س + ٢ص}$$

⇦مثال: إذا كان $س^٢ + ص^٢ = ٥$ أوجد $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{(١ ، ٢)}$

$$٢ س + ٢ ص \cdot \frac{د ص}{د س} = صفر$$

$$٢ ص \frac{د ص}{د س} = -٢س \longrightarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{-س}{ص} \longrightarrow \left.\frac{د ص}{د س}\right|_{(١ ، ٢)}$$

$$= \frac{-١}{٢}$$

ومن أشهر تطبيقات الاشتقاق الضمني هو استخدامه في التخلص من الأسس النسبية والجذور بأي دليل كانت هكذا:

⇦مثال: إذا كان $ص = س^{\frac{٢}{٣}}$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

نتخلص من الأسس $\frac{٢}{٣}$ بأن نربع الطرفين للقوة $\frac{٢}{٣}$ كما يلي:

$$(ص = س^{\frac{٢}{٣}})^٣$$

أي أن $ص^٣ = س^٢$ ومنها:

$$٣ص^٢ \cdot \frac{د ص}{د س} = ٢س$$

ومنها $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢س}{٣ص^٢}$ ويمكن أن نكمل الحل

$$= \frac{٢س}{٣(س^{\frac{٢}{٣}})^{٢}} = \frac{٢س}{٣ س^{\frac{٢}{٣}}}$$

مثال: إذا كان ص = $\sqrt[٣]{٢س + ١}$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

(ص = $\sqrt[٣]{٢س + ١}$)^{٣}

ص^{٣} = ٢س + ١

٣ ص^{٢} . $\frac{د ص}{د س}$ = ٢

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٢}{٣ص^{٢}}$ ويمكن أن نكمل الحل = $\frac{٢}{٣ \sqrt[٣]{(٢س + ١)^{٢}}}$

قاعدة ١٤

مشتقات الاقترانات الدائرية Derivatives of trigonometricl Functions

وهناك حالات ثلاث لهذا الاشتقاق ترد كما يلي وعلى التوالي

الحالة الأولى: سنورد فيما يلي مشتقة كل من الاقترانين ق(س) = جاس ، ق(س) = جتاس بلا برهان ثم سنجد مشتقة بقية الاقترانات الدائرية ق(س) = ظاس ، ق (س) = ظتا س، ق(س) = قاس ، ق(س) = قتا س معتمدين على مشتقة كلٍ من جاس، جتاس هكذا

إذا كان ق(س) = جاس ⟵ فإن قَ(س) = جتا س

وإذا كان ق(س) = جتاس ⟵ فإن قَ(س) = - جا س

أي أن مشتقة الزوج المرتب (جتاس، جاس) = (- جاس، جتا س)

وبالرموز (جتاس، جاس)َ = (- جاس، جتاس)

ولإيجاد (ظاس)´ نقول:

$$(\text{ظاس})' = \left(\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right)' = \frac{\text{جتاس} \times \text{جتاس} - \text{جاس}\,(-\ \text{جاس})}{\text{جتا}^{2}\text{س}}$$

مشتقة خارج قسمة اقترانين

$$= \frac{\text{جتا}^{2}\text{س} + \text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}} = \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س}}$$

$$= \left(\frac{1}{\text{جتاس}}\right)^{2} = \text{قا}^{2}\text{س}$$

أي أن (ظاس)´= $\text{قا}^{2}\text{س}$

وبنفس الطريقة أو بطريقة مشابهة لها نحصل على الجدول التالي الذي يضم الاقترانات الدائرية ومشتقاتها.

هكذا:

	الاقتران	مشتقة الأول
الجيب وجيب التمام	جاس جتاس	جتاس - جاس
الظل وظل التمام	ظاس ظتاس	$\text{قا}^{2}\text{س}$ - $\text{قتا}^{2}\text{س}$
القاطع وقاطع التمام	قاس قتاس	قاس ظاس - قتاس ظتاس

نلاحظ من الجدول أن مشتقات جتاس، ظتاس قتا س سوالب أي مشتقة الاقتران الذي يحوي التمام (الحرف ت) في اسمه يكون سالب.

⇦مثال: إذا كان ق(س) = جاس + جتاس أوجد قَ ($\frac{\pi}{4}$)

قَ(س) = جتا س – جاس

قَ($\frac{\pi}{4}$) = جتا $\frac{\pi}{4}$ – جا $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ - $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = صفر

الحالة الثانية: سنورد فيما يلي مشتقة كل من الاقترانات الدائرية والتي على الشكل: ق(س) = جا أس، حيث أ ∋ ح

ونطبق القانون قَ(س) = مشتقة الاقتران × مشتقة الزاوية

أي أن قَ(س) = (جتا أ س) (أ)

= أ جتا أ س

⇦مثال: (جا٥س)´ = (جتا ٥س) (٥) = ٥ جتا ٥س

وكذلك لبقية الاقترانات الدائرية وعلى نفس المنوال

(جتا أ س)´ = (- جا أ س) (أ) = - أ جا أ س

(ظا أ س)´ = (قا^{2} أ س) (أ) = أ قا^{2} أ س

(ظتا أ س)´ = (- قتا^{2} أ س) (أ) = - أ قتا^{2} أ س

(قا أ س)´ = (قا أ س ظا أ س) (أ) = أ قا أ س ظا أ س

(قتا أ س)´ = (- قتا أ س ظتا أ س) (أ) = - أ قتا أ س ظتا أ س

الحالة الثالثة: سنورد فيما يلي مشتقة كل من الاقترانات الدائرية والتي على الشكل: ق(س) = جا ^{ن} أس، حيث ن ∋ ص، أ ∋ ح

ونطبق القانون قَ(س) = مشتقة القوس × مشتقة الاقتران × مشتقة الزاوية

حيث ق(س) = جا ^{ن} أس = (جا أ س)^{ن}

أي أن قَ(س) = (ن جا$^{ن-١}$ أ س) (جتا أ س) (أ) = ن أ جا$^{ن-١}$ أس جتاأ س

⇦مثال: إذا كان ق(س) = جا^{٣} ٥س أوجد قَ(س)

قَ(س) = مشتقة القوس × مشتقة الاقتران × مشتقة الزاوية {أو قاعدة السلسلة}

= (٣ جا^{٢} ٥س) (جتا ٥س) (٥)

= ١٥ جا^{٢} ٥س جتا ٥س

وبشكل عام نطبق هذا القانون على جميع الاقترانات الدائرية

⇦مثال: إذا كان ص = جتا^{٢}س – جا^{٢}س أوجد $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س}$ = مشتقة القوس × مشتقة الاقتران × مشتقة الزاوية لكل من الاقترانين جتا^{٢}س، جا^{٢}س

= (٢جتاس) (- جاس) (١) – (٢جاس) (جتاس) (١)

= - ٢جتاس جاس – ٢جتاس جاس = - ٤ جاس جتاس

يمكن حل هذا السؤال بطريقة أخرى وهي:

بما أن جتا^{٢}س – جا^{٢}س = جتا ٢ س {لأن جتا٢س ... ـا^{٢}س متطابقة مشهورة}

∴ ص = جتا ٢ س

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = مشتقة الاقتران × مشتقة الزاوية

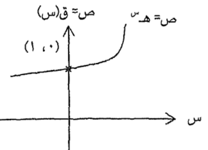
= - جا٢س × ٢ = - ٢جا٢س {لكن جا٢س = ٢ جاس جتاس}

= - ٢ × ٢ جاس جتاس = - ٤ جاس جتاس (الجواب نفسه)

قاعدة ١٥

مشتقة الاقتران الأس الطبيعي ق (س) = $هـ^{س}$

ونذكر قبل الاشتقاق بأن ق (س) = $هـ^{س}$ ، اقتران أسي طبيعي أساسه هـ = ٢,٧٢ ويسمى هـ العدد النابييري نسبة إلى العالم نابيير الذي أول من أوجده ورسم منحناه كما في الشكل



ويمر منحناه بالنقطة (٠ ، ١) دائماً

والآن هناك حالتان للاشتقاق هما:

الحالة الخاصة: إذا كان ق (س) = $هـ^{س}$

فإن قَ (س) = $هـ^{س}$

أي مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي $هـ^{س}$ هي نفسه $هـ^{س}$

وبالرموز إذا كان ق(س) = $هـ^{س}$ ⟵ فإن قَ(س) = $هـ^{س}$

الحالة العامة: إذا كان ق (س) = $هـ^{ل(س)}$

فإن قَ (س) = $هـ^{ل(س)}$ × لَ (س)

والتفسير مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي ق(س) = $هـ^{ل(س)}$ هي $هـ^{ل(س)}$ × مشتقة أسه

⇦ مثال: إذا كان ق(س) = $هـ^{س^٢}$ فإن قَ (س) = $هـ^{س^٢}$ × مشتقة أسه

∴ قَ (س) = ($هـ^{س^٢}$) (٢س) = ٢س . $هـ^{س^٢}$

⇦ مثال: إذا كان ص = $س^٢$ – ٣$هـ^{س}$ – ١ أوجد $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٠}$

$\frac{د ص}{د س}$ = ٢س − ٣هـ^س^ − صفر

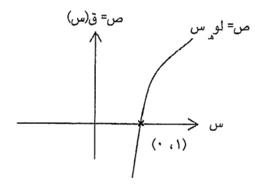
$\frac{د ص}{د س}\Big|_{س=٠}$ = ٢ (٠) − ٣هـ^٠^ = صفر − ٣ (١) = − ٣

قاعدة ١٦

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي ق (س) = لو~هـ~ س

نُذكر قبل الاشتقاق:

أن ق (س) = لو~هـ~ س اقتران لوغاريتمي طبيعي أساسه هـ = ٢,٧٢ ويسمى هـ العدد النابيري نسبة إلى العالم نابيير من أوجده ورسم منحناه كما في الشكل ويمر منحناه بالنقطة (١ ، ٠) دائماً



والآن هناك حالتان للاشتقاق هما:

الحالة الخاصة: إذا كان ص = لو~هـ~ س ⟵ فإن قَ(س) = $\frac{١}{س}$ ، س > صفر

أي أن مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي ق(س) = لو~هـ~ س هي مقلوب س = $\frac{١}{س}$

⇦ مثال: إذا كان ق(س) = لو~هـ~ س ⟵ فإن قَ(س) = $\frac{١}{س}$

الحالة العامة:

إذا كان ق(س) = لو~هـ~ ل (س) ⟵ فإن قَ(س) = $\frac{\text{مشتقة الاقتران ل(س)}}{\text{الاقتران ل (س) نفسه}}$

⇦ مثال: إذا كان ق(س) = لو~هـ~ س^٢^ ⟵ فإن قَ(س) = $\frac{(س^٢)'}{س^٢}$ = $\frac{٢}{س}$

ويمكن حل المثال عودة إلى الحالة الخاصة كما يلي:

$$ق(س) = لو_هـ س^٢ = ٢ لو_هـ س = (٢) × \frac{١}{س} = \frac{٢}{س}$$

مثال: أوجد قَ (س) لكل من الاقترانات التالية:

(١) $ق (س) = لو_هـ |س^٢ + ١|$

الجواب: $قَ (س) = \frac{(س^٢ + ١)َ}{س^٢ + ١} = \frac{٢ س}{س^٢ + ١}$ فيصبح البسط مشتقة المقام

(٢) $ق (س) = لو_هـ \sqrt{س}$

الجواب: $قَ (س) = \frac{(\sqrt{س})َ}{\sqrt{س}} = \frac{\frac{١}{٢ \sqrt{س}}}{\frac{\sqrt{س}}{١}}$ (كون $(\sqrt{س})َ = \frac{١}{٢ \sqrt{س}}$)

$$= \frac{١}{٢ \sqrt{س}} × \frac{١}{\sqrt{س}} = \frac{١}{٢س}$$

(٣) $ق (س) = س لو_هـ س$ (مشتقة حاصل ضرب اقترانين)

قَ (س) = الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

$∴ قَ (س) = س × (لو_هـ س)َ + لو_هـ س × (سَ)$

$$= (س × \frac{١}{س}) + لو_هـ س × ١$$

$$= ١ + لو_هـ س$$

(٤) $ق (س) = لو_هـ جتاس$

$$قَ (س) = \frac{(جتاس)َ}{جتاس} = \frac{- جاس}{جتاس} = - ظاس$$

(٥) ق (س) = $هـ^{ظاس}$

قَ (س) = $هـ^{ظاس}$ × (ظاس)َ

= $هـ^{ظاس}$ × $قا^{٢}س$

= $قا^{٢}س$. $هـ^{ظاس}$ {أو باستخدام قاعدة السلسلة}

هكذا: ص = $هـ^{ظاس}$

نفرض أن ع = ظاس

∴ ص = $هـ^{ع}$

∴ $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$ = $هـ^{ع}$ × $قا^{٢}س$

= $هـ^{ظاس}$ × $قا^{٢}س$ = $قا^{٢}س$. $هـ^{ظاس}$ الجواب نفسه

(٦) ص = $٢^{س}$

الحل:

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

أي أن $لو_{هـ}$ص = $لو_{هـ}٢^{س}$ = س $لو_{هـ}٢$ ثم بالاشتقاق الضمني

$\frac{١}{ص} . \frac{د ص}{د س}$ = س × صفر + $لو_{هـ}٢$ × ١ = $لو_{هـ}٢$

∴ $\frac{د ص}{د س} = \frac{لو_{هـ}٢}{\frac{١}{ص}}$ = ص $لو_{هـ}٢$ ونعوض بدلاً من ص هكذا

$\frac{د ص}{د س}$ = ($٢^{س}$) $لو_{هـ}٢$ = $٢^{س}$. $لو_{هـ}٢$

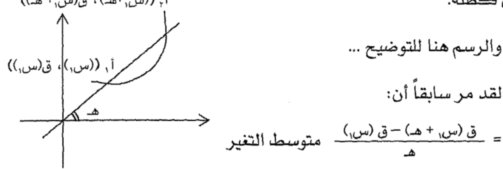
(٢١ – ٤) تطبيقات التفاضل

سنورد هذه التطبيقات بمضمون موجز وبأسلوب بسيط كما يلي:

أولاً: التطبيقات الهندسية للمشتقة الأولى:

بما أن المشتقة الأولى قَ (س) لأي اقتران حقيقي ص = ق (س) هي نهاية متوسط تغيره – معدل تغيره Rate of Change ، أي أن قَ (س) = $\lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ للاقتران ق (س).

لذا سنحاول تفسير معناها الهندسي استعانة بالهندس التحليلية الملازمة للتفاضل كظله.



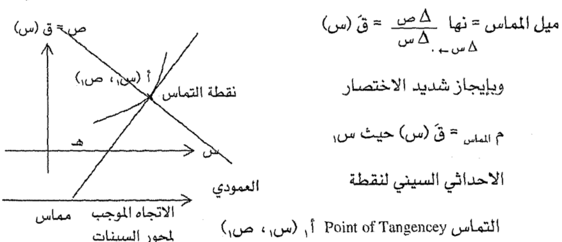
والرسم هنا للتوضيح ...

لقد مر سابقاً أن:

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق (س_1 + هـ) - ق (س_1)}{هـ}$$ متوسط التغير

وهذا يساوي ميل القاطع الواصل بين النقطتين أ١ ، أ٢ كما في الشكل أعلاه وعندما تقترب أ٢ من أ١ لسبب من الأسباب وبالنهاية تنطبق عليها ليصبح القاطع أ١ أ٢ مماساً Tangent Line للمنحنى ق (س) وكما في الشكل أيضاً ، أي أن

ميل المماس = $\lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = قَ (س)



وبإيجاز شديد الاختصار

م المماس = قَ (س) حيث س١

الاحداثي السيني لنقطة

التماس Point of Tangencey أ١ (س١ ، ص١)

ثم إن م $_{مماس}$ = ظا ي، حيث ي هي الزاوية المحصورة بين المماس والاتجاه الموجب لمحور السينات

وعندها فإن $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ (متوسط التغير) = م $_{مماس}$ = قَ (س$_1$) = ظاي

وبناء علية يمكن إيجاد معادلتي المماس والعمودي Normal Line عليه عند نقطة التماس هكذا:

معادلة المماس عند نقطة التماس أ$_1$ (س$_1$، ص$_1$) هي

ص − ص$_1$ = م $_{مماس}$ (س − س$_1$)

ولأن م $_{مماس}$ × م $_{العمودي}$ = − ١ من الهندسة التحليلية

فإن م $_{العمودي}$ = $\frac{-١}{م_{مماس}}$

ص − ص$_1$ = م $_{العمودي}$ (س − س$_1$)

⇦مثال: أوجد م المماس و م العمودي للاقتران ق (س) = س^2 + س + ١ عند النقطة (١، ٣)

م $_{مماس}$ = قَ (١) فنجد أولاً قَ (س) = ٢س + ١

ومنها م $_{مماس}$ = قَ (١) = ٢ (١) + ١ = ٢ + ١ = ٣

م $_{العمودي}$ = $\frac{-١}{م_{مماس}}$ = $\frac{-١}{٣}$

⇦مثال: أوجد قياس الزاوية التي يصنعها مماس المنحنى ق(س) = س^2 مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = − $\frac{١}{٢}$

بما أن ظاي = م $_{مماس}$ = قَ (− $\frac{١}{٢}$)

ولأن قَ (س) = ٢س

فإن ظا ي = قَ (- $\frac{١}{٢}$) = ٢ (- $\frac{١}{٢}$) = - ١

∴ ظا ي = - ١

ومنها ∡ي = ١٨٠° - ٤٥°

= ١٣٥° الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

⇦مثال: أوجد معادلتي المماس والعمودي عليه للاقتران ق(س) = س^{٢} + س

١ - عند نقطة التماس، عندما س$_{١}$ = ٢

ص$_{١}$ = ق(٢) = (٢)^{٢} + ٢ - ١ = ٤ + ١ = ٥

∴ نقطة التماس (٢، ٥)

م$_{\text{مماس}}$ = قَ (س$_{١}$)

لكن قَ (س) = ٢س + ١

قَ (٢) = ٢(٢) + ١ = ٥

ومنها م$_{\text{العمودي}}$ = - $\frac{١}{٥}$

معادلة المماس

ص - ص$_{١}$ = ٥ (س - س$_{١}$)

ص - ٥ = ٥ (س - ٢)

ص - ٥ = ٥س - ١٠

ص = ٥س - ١٠ + ٥

ص = ٥س - ٥

معادلة العمودي

ص - ص$_{١}$ = - $\frac{١}{٥}$ (س - س$_{١}$)

ص - ٥ = - $\frac{١}{٥}$ (س - ٢)

ص - ٥ = - $\frac{١}{٥}$ س - $\frac{٢}{٥}$

ص = - $\frac{١}{٥}$ س + $\frac{٢}{٥}$ + ٥

ص = - $\frac{١}{٥}$ س + $\frac{٢٧}{٥}$

ملحوظة:

يمكن القول أنه لا يوجد مماسات لمنحنيات بعض الاقترانات عند أي نقطة عليها كالاقترانات الخطية والقيمة المطلقة شرط أن لا تكون نقطة التماس هي صفر الاقتران أو رأس الزاوية لأن مماسات تلك الاقترانات تنطبق على منحنياتها تماماً وتظهر كأنها المنحنى نفسه.

مثال: أوجد معادلة المماس للاقتران ق (س) = ٢س – ٧ عندما س = ١

قَ (س) = ٢ ⟵ م$_{مماس}$ = ٢ ، ص$_١$= ٢(١) – ٧ = – ٥

نقطة المماس (١ ، – ٥)

معادلة المماس:

ص – – ٥ = ٢ (س – ١)

ص + ٥ = ٢س – ٢

ص = ٢س – ٢ – ٥

ص = ٢س – ٧ وهي نفسها معادلة المنحنى ق(س) = ٢س – ٧

ثانياً: التطبيقات الفيزيائية للمشتقة الأولى قَ (س) والثانية قً (س)

هنالك استخدامات كثيرة لمفهوم المشتقة الأولى والثانية منها على سبيل المثال:

(١) السرعة اللحظية Speed أو Instananeous velocity

إنها السرعة التي يُشير إليها عداد السرعة في الحافلات والمركبات في أي لحظة ورياضياً هي مشتقة اقتران المسافة بالنسبة للزمن.

وبالرموز $ع_{اللحظية} = فَ = \frac{د ف}{د ن}$

⇦مثال: يتحرك جسيم حسب القاعدة $ف(ن) = ن^٢ + ٥ ن$ حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني أوجد سرعته بعد ٣ ثواني.

$ع_{اللحظية} = فَ = ٢ ن + ٥$

$ع |_{ن=٣} = ٢ (٣) + ٥ = ١١$ م/ ث

(٢) التسارع اللحظي Acceleration

يجب أولاً التعرف على مفهوم التسارع المتوسط Average Acceleration

وهو $ت_{المتوسط} = \frac{\Delta ع}{\Delta ن} = \frac{ع_٢ - ع_١}{ن_٢ - ن_١}$

⇦مثال: يتحرك جسيم حسب القاعدة $ف = ن^٣ + ٤ ن^٢$ احسب تسارعه المتوسط في الفترة [١، ٣]

$ت_{المتوسط} = \frac{ع_٢ - ع_١}{ن_٢ - ن_١}$ لكن $ع = ٣ ن^٢ + ٨ ن$

$\therefore ت_{المتوسط} = \frac{\{ ٣ (٣)^٢ + ٨ (٣) \} - \{ ٣ (١)^٢ + ٨ (١) \}}{٣ - ١} = \frac{٥١ - ١١}{٢} = \frac{٤٠}{٢}$

$= ٢٠$ م/ $ث^٢$

أما التسارع اللحظي فهو التغير في السرعة بالنسبة إلى الزمن ورياضياً ت = المشتقة الأولى للسرعة اللحظية ع بالنسبة للزمن

وبالرموز $ت = عَ = \frac{د ف}{د ن}$

وبما أن السرعة ع مشتقة الزمن فإن

$ت = فً = \frac{د^٢ ف}{د ن^٢}$ ويقاس بوحدة م/ $ث^٢$ أو سم/ $ث^٢$

⇦مثال: يتحرك جسيم حسب القاعدة $ف = ٤\sqrt{ن} + ٢ن$ أوجد تسارعه عندما سرعته تساوي ٣ م / ث.

$$ع = فَ = \frac{٤ \times ١}{٢\sqrt{ن}} + ٢ = ٣$$

$$\frac{٤}{٢\sqrt{ن}} = ١ \longrightarrow ٢\sqrt{ن} = ٤$$

$$\sqrt{ن} = ٢ \longrightarrow ن = ٤ \text{ ثواني}$$

والآن نجد التسارع:

$$ت = عَ = فً = \left(\frac{٤}{٢\sqrt{ن}} + ٢\right)' = \frac{٢\sqrt{ن} \times صفر - ٤ \times \frac{١}{٢\sqrt{ن}}}{(٢\sqrt{ن})^٢} + صفر$$

$$= \frac{\frac{-٤}{\sqrt{ن}}}{(٢\sqrt{ن})^٢}$$

$$ت\Big|_{ن=٤} = \frac{\frac{-٤}{\sqrt{٤}}}{(٢\sqrt{٤})^٢} = \frac{\frac{-٤}{٢}}{١٦} = \frac{-٢}{١٦}$$

$$= \frac{-١}{٨} \text{ م/ ث}^٢$$

⇦مثال: يتحرك جسيم حسب العلاقة $ف = ٦ن^٢ - \frac{١}{٣}ن^٣$ احسب سرعته وتسارعه بعد ٣ ثواني.

$$ع = فَ = ١٢ن - ن^٢$$

$$ع\Big|_{ن=٣} = ١٢(٣) - (٣)^٢ = ٣٦ - ٩ = ٢٧ \text{ م/ ث}$$

$$ت = عَ = فً = ١٢ - ٢ن$$

$$ت\Big|_{ن=٣} = ١٢ - ٢(٣) = ١٢ - ٦ = ٦ \text{ م/ ث}^٢$$

ثالثاً: المعدلات المرتبطة بالزمن Related Rates

عندما يتحرك جسيم على خط مستقيم مدة من الزمن ويكون بعده س وحدة عند نقطة ثابتة في اللحظة ؟ فإنه يكوِّن اقتراناً مرتبطاً بالزمن يسمى المعدل الزمني، وإذا كان المتغيران س، ص كل منها اقتراناً زمنياً فإننا نُسمي $\frac{د س}{د ؟}$ ، $\frac{د ص}{د ؟}$ معدلين زمنيين وهكذا لعدة متغيرات س، ص، ع، ... تسمى المعدلات المرتبطة بالزمن.

ولحل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن يجب القيام إجرائياً بما يلي:

(١) أوجد علاقة أو معادلة واحدة بين المتغيرات الداخلة في المسألة في لحظة ؟ وتحتاج لذلك بعضاً من القوانين ويمكن أن تحتاج الرسم أيضاً.

(٢) اشتق طرفي العلاقة أو المعادلة اشتقاقاً ضمنياً بالنسبة إلى الزمن فتحصل بذلك على العلاقة بين المعدلات الزمنية المرتبطة.

(٣) عوض عن المعطى في المسألة لتحصل على المطلوب بأقصر الطرق وأسرعها كما يلي:

⇦مثال: جسيم يتحرك في مدنار دائري معادلته $س^٢ + ص^٢ = ١$ ويمر بالنقطة ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) أثناء حركته.

فإذا كان إحداثيه الصادي يقل بمعدل ٣ وحدات / ث.

ما معدل تغير إحداثيه السيني

بما أن العلاقة أو المعادلة موجودة وهي $س^٢ + ص^٢ = ١$ فإننا نشتق بالنسبة للزمن:

$$٢س \cdot \frac{دس}{دن} + ٢ص \cdot \frac{دص}{دن} = صفر$$

ونعوض النقطة:

$$٢\left(\frac{١}{٢}\right)\frac{دس}{دن} + ٢\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)(٣) = صفر$$

$$\frac{دس}{دن} + ٣\sqrt{٣} = صفر$$

$\frac{دس}{دن} = -٣\sqrt{٣}$ وحدة / ث معدل تغير إحداثيه السيني نقصاناً.

⇦مثال: بالون كروي يتمدد بانتظام فإذا كان معدل زيادة نصف قطره ٢سم/ ث احسب معدل زيادة حجمه عندما يكون نصف قطره ٥سم.



نفرض نصف قطر البالون = س سم

حجم الكرة = حجم البالون

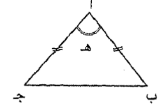
$$ح = \frac{٤}{٣} نق^{٣} \pi$$

$$\frac{دح}{دن} = \frac{٤}{٣} \times ٣ نق^{٢} \pi \cdot \frac{دنق}{دن}$$

$$= ٤ (٥)^{٢} (\pi) (٢) = ٤ (٢٥) (٢) \pi$$

$$= ٢٠٠ \pi \text{ سم}^{٣}/ \text{ث زيادة}$$

⇦مثال: مثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه المتساويين ٦ سم ، إذا كان سرعة تغير الزاوية هـ المحصورة بين ضلعه تساوي ٢° / دقيقة جد سرعة تغير مساحة المثلث عندما هـ = $\frac{\pi}{٦}$ راديان.



١٨٠° ⟵ π راديان

٢° ⟵ ؟

$\therefore \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{٢ \times \pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٩٠}$ راديان معدل تغير الزاوية

بما أن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × الضلع الأول × الضلع الثاني × جاهـ

حيث هـ بالرادايان

$$\text{م} = \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٦ \times \text{جاهـ}$$

$\therefore$ م = ١٨ جا هـ

نشتق بالنسبة للزمن

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ١٨ \text{ جتا هـ} \cdot \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$$

$$= ١٨ \text{ جتا } \left(\frac{\pi}{٦}\right) \times \frac{\pi}{٩٠}$$

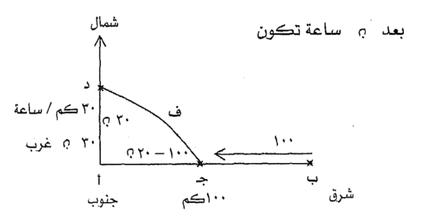
$$= ١٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\pi}{٩٠} = \frac{\sqrt{٣}}{١٠} \pi \text{ سم}^{٢} / \text{ث}$$

⇦مثال: أ، ب سفينتان البعد بينهما ١٠٠ كم ترسو السفينة أ غرب السفينة ب، بدأت أ الحركة نحو الشمال بسرعة ٣٠كم / ساعة وبنفس اللحظة بدأت ب الحركة نحو الغرب بسرعة ٢٠ كم / ساعة.

جد معدل تغير البعد بين السفينتين بعد مرور ساعتين.

سنحل هذه المسألة بدلالة ن فقط

بعد ن ساعة تكون



السفينة أ قطعت أ د = ٣٠ × ن = ٣٠ن كم.

وتكون السفينة ب قطعت ب جـ = ٢٠ × ن = ٢٠ن كم.

فالمثلث أ جـ د تكون أضلاعه

أ جـ = (١٠٠ - ٢ن) كم

أ د = ٣٠ن كم

د جـ = ف كم

والمطلوب إيجاد $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ؟؟

لكن ف^{٢} = (١٠٠ — ٢ن)^{٢} + (٣٠ن)^{٢} نظرية فيثاغورس

∴ ٢ف . $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٢(١٠٠ — ٢ن)(-٢) + ٢(٣٠ن)(٣٠)

∴ ف . $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = - ٢٠٠ + ٤ن + ٩٠٠ن

ف $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٩٠٤ن - ٢٠٠

وبعد مرور ساعتين تكون ن = ٢

∴ ف^{٢} = (١٠٠ — ٢(٢))^{٢} + (٣٠(٢))^{٢}

ف^{٢} = (١٠٠ — ٤)^{٢} + (١٠)^{٢}

ف^{٢} = (٩٦)^{٢} + ٣٦٠٠

ف^{٢} = ٩٢١٦ + ٣٦٠٠ = ١٢٨١٦

ف = $\sqrt{١٢٨١٦}$ = ١١٣

∴ $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = $\frac{٩٠٤(٢) - ٢٠٠}{١١٣}$ = $\frac{١٨٠٨ - ٢٠٠}{١١٣}$ = $\frac{١٦٠٨}{١١٣}$

= ١٤,٢ كم / ث معدل التغير بين السفينتين

رابعاً: إشارة المشتقة الأولى قَ (س)

ترتبط قَ (س) ارتباطاً وثيقاً بعملية التفاضل لأهميتها في تطبيقاته المنوعة على الاقترانات الحقيقية، إذ تعتبر مؤشراً دقيقاً لمعرفة النقط الحرجة، وتعيين الاقترانات المتزايدة والمتناقصة والثابتة وإيجاد القيم القصوى بأنواعها:

ونبدأ:

■ النقطة الحرجة Critical Point

هي النقطة (س١، ق(س١)) الواقعة في مجال الاقتران ق(س) والتي تكون عندها قَ(س) = صفر أو غير موجودة، وغالباً ما تتواجد النقط الحرجة على أطراف الاقتران المحدود ورؤوس القطوع المكافئة وأصفار اقتران القيمة المطلقة كون المشتقة الأولى قَ (س) هناك غير موجودة.

⇦مثال: أوجد النقط الحرجة للاقتران ق (س) = س^{٢} − س + ١

قَ (س) = ٢س − ١ = صفر ⟵ س = $\frac{١}{٢}$ هناك نقطة حرجة

⇦مثال: ليكن ق (س) = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ معرف على الفترة [− ٨، ٨] عين النقط الحرجة، عندما س = {− ٨، ٨} هناك نقطة حرجة كون المشتقة عندها غير موجودة

ق(س) = س$^{\frac{٢}{٣}}$

ثم قَ (س) = $\frac{٢}{٣}$ س$^{-\frac{١}{٣}}$ = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س}}$ وعندما س = صفر

فإن قَ (٠) غير موجودة

∴ النقط الحرجة عندما س = {− ٨، ٠، ٨}

■ مجالات

«التزايد Increasing والتناقص Decreasing»

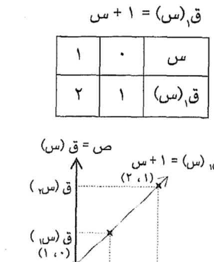
وعلاقتها بالمشتقة الأولى قَ (س)

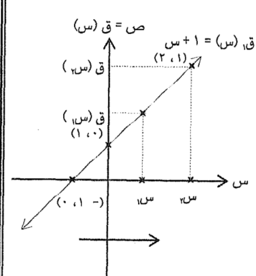
عند التمثيل البياني للاقترانين ق$_{١}$(س) = ١ + س، ق$_{٢}$(س) = ١ - س

كما يلي:

ق$_{١}$(س) = ١ + س

س	٠	١
ق$_{١}$(س)	١	٢





من الملاحظ أنه كلما ازدادت قيمة س فإن قيمة ق(س) تزداد

أي أن:

(س$_{٢}$ > س$_{١}$) ⟵ فإن ق(س$_{٢}$) > ق (س$_{١}$)

تزداد (فوق س$_{٢}$ > س$_{١}$)، تزداد (فوق ق(س$_{٢}$) > ق (س$_{١}$))

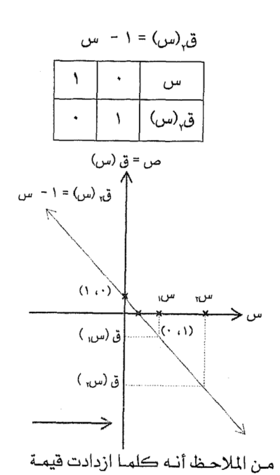
معطى

أي تزداد قيمة ق(س) بزيادة قيمة س

فالاقتران ق$_{١}$ (س) = ١ + س متزايد

ق$_{٢}$(س) = ١ - س

س	٠	١
ق$_{٢}$(س)	١	٠



من الملاحظ أنه كلما ازدادت قيمة س فإن قيمة ق(س) تقل

أي أن:

(س$_{٢}$ > س$_{١}$) ⟵ فإن ق(س$_{٢}$) > ق (س$_{١}$)

تزداد (فوق س$_{٢}$ > س$_{١}$)، تقل (فوق ق(س$_{٢}$) > ق (س$_{١}$))

معطى

أي تقل قيمة ق(س) بزيادة قيمة س

فالاقتران متناقص

وبعد ان أصبح واضحاً أن ق$_{١}$ (س) = ١ + س متزايد

لنجد الآن مشتقة

قَ$_{١}$ (س) = ١ إشارتها موجبة / الاقتران متزايد

وأصبح واضحاً أيضاً أن ق$_{٢}$ (س) = ١ − س متناقص

لنجد الآن مشتقة

قَ$_{٢}$ (س) = − ١ إشارتها سالبة / الاقتران متناقص

لذا يمكن كتابة القاعدة التالية

ليكن ق(س) متصل على الفترة [أ ، ب] وقابلاً للاشتقاق على الفترة (أ ، ب)

يكون ق (س) متزايد في الفترة [أ ، ب] عندما قَ (س) > صفر

و يكون ق (س) متناقص في الفترة [أ ، ب] عندما قَ (س) < صفر

إذا كان قَ (س) = صفر فإن ق(س) لا متزايد ولا متناقص بل اقتران ثابت .... (١)

وعندما قَ (س$_{١}$) = صفر فإن (س$_{١}$ ، قَ (س$_{١}$)) تسمى نقطة حرجة كما مر سابقاً .... (٢)

من هذا وذاك (من ١ ، ٢) فإن جميع نقط الاقتران الثابت ق(س) = جـ نقط حرجة، لذا من هنا بالذات أصبح هناك ما يسمى بالفترة الحرجة وهي جزء من اقتران ثابت وهكذا فإنه لإيجاد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق (س) في مجاله فإننا نجد أولاً قَ (س) ثم نبحث في إشارتها كما في الأمثلة التالية:

⇦مثال: إذا كان ق (س) = س^{٢} − ٣س أوجد مجالات تزايده وتناقصه

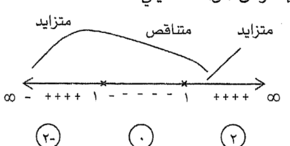
قَ (س) = $\frac{3س^2 - 3}{3}$ = $\frac{صفر}{3}$

س^2 – ١ = صفر

(س + ١) (س – ١) = صفر

س = - ١، ١ هناك نقط حرجة

ثم نبحث إشارة قَ (س) كما يلي



نعوض (٢-) (٠) (٢)

قَ (- ٢) = (- ٢)^2 - ١ = ٤ - ١ = ٣ إشارة موجبة/ الاقتران متزايد

قَ (٠) = (٠)^2 - ١ = - ١ إشارة سالبة/ الاقتران متناقص

قَ (٢) = (٢)^2 - ١ = ٤ - ١ = ٣ إشارة موجبة/ الاقتران متزايد

وعندما تكون قَ (س) اقتران تربيعي فإنه إشارة ما بين الجذرين عكس إشارة أ ⟵ سالبة

وخارج الجذرين نفس إشارة أ ⟵ موجبة كما في الشكل

لذلك ق (س) متزايد على الفترات (- ∞، - ١] ∪ [١، ∞) ومتناقص على الفترة [- ١، ١]

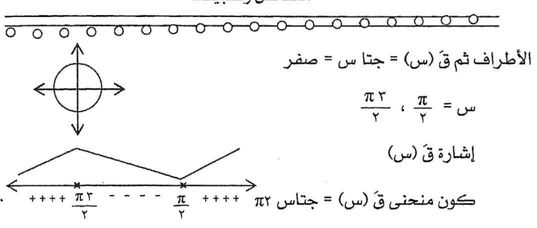
⇦مثال: ليكن ق (س) = جاس معرف على [٠، ٢π] أوجد مجالات تزايده وتناقصه

نجد النقطة الحرجة وهي عندما س = صفر عندما س = صفر، ٢π على

الأطراف ثم قَ (س) = جتا س = صفر

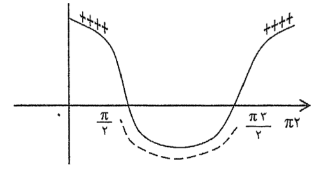
س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$

إشارة قَ (س)



كون منحنى قَ (س) = جتاس ٢π

هو:



∴ ق (س) = جاس متزايد في الفترات (٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [∪] $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π)

و متناقص في الفترة] $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$ [

⇦مثال: إذا كان ق (س) = (س − ٣)^{٣} أوجد مجالات تزايده وتناقصه

قَ (س) = مشتقة القوى × مشتقة ما بداخله

قَ (س) = ٣ (س − ٣)^{٢} (١) = صفر

(س − ٣)^{٢} = صفر ⟵ س − ٣ = صفر

س = ٣ هناك نقطة حرجة

+ + + + + + + +
−∞ (٠) ٣ (٥) ∞

نعوض (٠) في قَ (س):

قَ (٠) = ٣ (٠ − ٣)^{٢} = ٣ (٩) = ٢٧ / موجبة متزايدة

ونعوض العدد (٥) في قَ (س):

قَ (٥) = ٣ (٥ − ٣)^{٢} = ٣ (٢)^{٢} = ١٢ / موجبة متزايدة

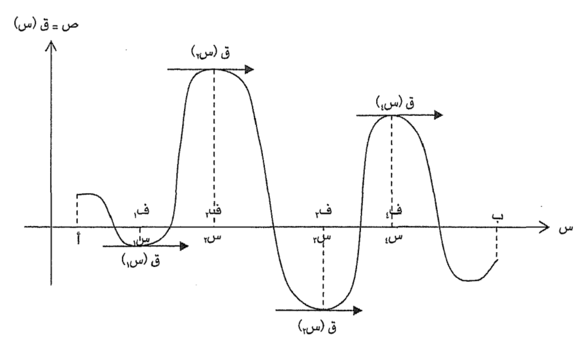
∴ ق (س) متزايد في الفترة (- ∞، ∞)

أو متزايد على ح.

◘ القيم القصوى Extreme Values

سنناقش كيفية إيجاد القيم القصوى المحلية Relative والمطلقة Absolute باختبار المشتقة الأولى قَ (س).

بداية نستعين بالشكل المجاور لإيضاح مفهوم القيم القصوى والتمييز بين أنواعها المحلية والمطلقة:



من الملاحظ أن ق ($س_٢$) ، ق ($س_٤$) هما أكبر القيم التي يأخذها الاقتران ق(س) في الفترات التي تحوي $س_٢$ ، $س_٤$ وهما $ف_٢$ ، $ف_٤$

لذا فإن ق ($س_٢$) ، ق ($س_٤$) قيم قصوى من نوع عظمى محلية Maximum Value لأن كلاً منهما أكبر قيمة للاقتران في الفترة التي تحتوي النقطة $س_٢$ ، $س_٤$

ومن الملاحظ أن ق ($س_١$) ، ق ($س_٣$) هما أصغر القيم التي يأخذها الاقتران

ق (س) في الفترات التي تحوي $س_1$ ، $س_3$ وهما $ف_1$ ، $ف_3$

لذا فإن ق ($س_1$) ، ق ($س_3$) قيم قصوى من نوع صغرى محلية Minimum Value لأن كلاً منهما أصغر قيمة للاقتران في الفترة التي تحتوي النقطة $س_1$ ، $س_3$ فالقيم القصوى المحلية العظمى والصغرى هي ق ($س_1$) ، ق ($س_2$) ، ق ($س_3$)، ق ($س_4$)

ولإيجاد القيم القصوى المطلقة سواء أكانت صغرى أم عظمى فإننا نقارن بين العظمى المحلية وأكبرها بالقيمة تسمى عظمى مطلقة

مثل ق ($س_2$) في الفترة [أ ، ب] جميع المجال.

وكأن القيمة العظمى المطلقة كانت محلية ثم أخذت أكبر قيمة للاقتران فأصبحت عظمى مطلقة وتقارن بين الصغرى المحلية بالقيمة تسمى صغرى مطلقة.

مثل ق ($س_3$) في الفترة [أ ، ب] جميع المجال.

وكأن القيمة الصغرى المطلقة كانت محلية ثم أخذت أصغر قيمة للاقتران فأصبحت صغرى مطلقة وبما أن المماس عند القيم القصوى يوازي محور السينات كما هو واضح من الشكل فإن النقط $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، $س_4$ نقط حرجة.

فالنقط الحرجة تعين قيم قصوى ولكن ليس دائماً لذا يمكن أن يقال:

ليس كل نقطة حرجة تحدد قيمة قصوى

مع ملاحظة أن القيمة عند النقطة الحرجة تغير من إشارة قَ (س) لذا فالاقتران يغير من تزايده إلى تناقصه ومن تناقصه إلى تزايده لذا فالاقتران المتزايد على ح لا يحوي قيماً قصوى على الإطلاق وكذلك الاقتران المتناقص على ح.

لذا فالنقط الحرجة تحدد قيم قصوى عندما تغير قَ (س) من إشارتها قبل

النقطة $س_1$ وبعدها وعندما $قَ(س_1)$ = صفر إذا كانت موجودة أو $قَ(س_1)$ غير موجودة.

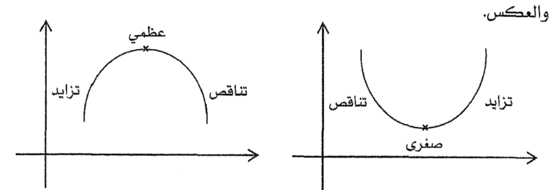
وقبل أن نبدأ بالأمثلة نود أن نناقش الملحوظتين التاليتين:

ملحوظة «١»

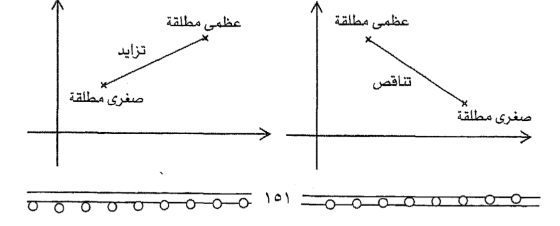
إن النقط الحرجة لا تحدد قيماً قصوى كما في الاقتران $ق(س) = س^3$ ، فإن $قَ(س_1)$ = صفر عندما س = صفر نقطة حرجة ولكنها لا تحدد قيمة قصوى كون الاقتران $ق(س) = س^3$ متزايد في ح

ملحوظة «٢»

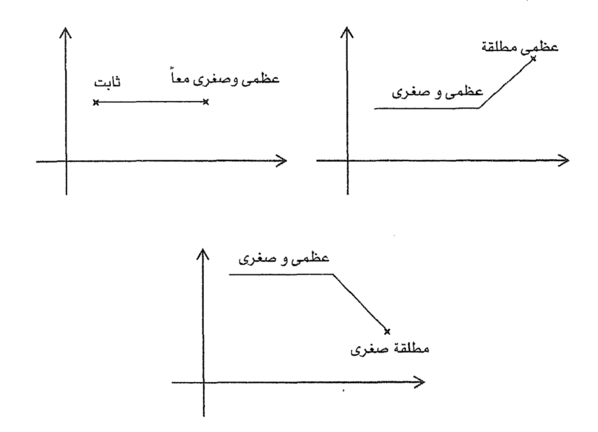
لإيجاد القيم العظمى والصغرى المحلية والمطلقة خلال مجال الاقتران يجب أن تغير $قَ(س_1)$ من إشارتها قبل وبعد $س_1$ حتى يغير الاقتران من تزايده إلى تناقص والعكس.



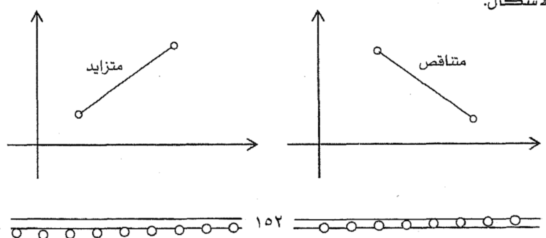
واما عند الأطراف وكما في الرسم فإن بداية التناقص عظمى مطلقة ونهاية التناقص صغرىمطلقة وبداية التزايد صغرى مطلقة ونهاية التزايد عظمى مطلقة (وجميعها مطلقة كما ترى).

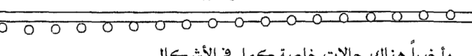


والقيم القصوى يمكن أن تكون فترات وليس نقطاً فقط كما لا يمكن التمييز بين الصغرى والعظمى كما في الأشكال.

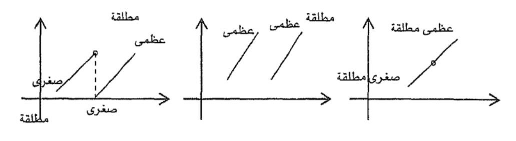


ويمكن أن تكون الأطراف لا تنتمي إلى الاقتران وعندها لا توجد للاقتران قيم عظمى وصغرى إذا كان الاقتران محدود ومعرف على فترة مفتوحة كما في الأشكال.



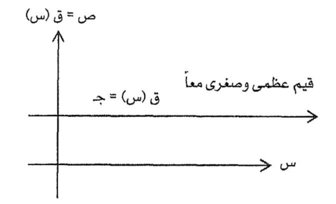


وأخيراً هناك حالات خاصة كما في الأشكال

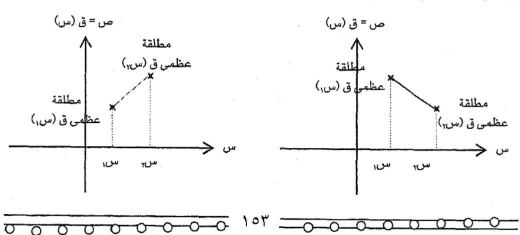


وبإيجاز شديد نقول:

أولاً: جميع نقط الاقتران الثابت حرجة لأن قَ (س) = صفر، لذا فكل نقطة تحدد قيم عظمى وصغرى معاً ولا يمكن تمييزها مطلقاً كما في الشكل



ثانياً: الاقتران الخطي لا يحدد قيم قصوى إلا إذا كان محدداً فإنه يحدد قيمة صغرى عند بداية تزايده أو نهاية تناقصه وعظمى عند بداية تناقصه ونهاية تزايده وفي الحالتين تكون مطلقة كما في الشكلين



ثالثاً: جميع الاقترانات الأخرى نجدفيها النقط الحرجة عندما قَ (س$_{١}$) = صفر خلال المجال ثم نلاحظ التغير في إشارة قَ (س) ثم نجد القيم القصوى ونوعها كما يلي:

⇦مثال: جد النقط الحرجة للاقتران ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢ ثم اختبرها لمعرفة القيم العظمى والصغرى المحلية والمطلقة في الحالتين:

بما أنه متصل كونه كثير حدود لذا فإننا نجد:

قَ(س) = ٣س^{٢} − ٦س

٣س^{٢} − ٦س = صفر

٣س (س - ٢) = صفر

عندما س = {صفر، ٣} هناك نقط حرجة يمكن أن تعين قيم قصوى بعد ان تغير قَ(س) من إشارتها قبل وبعد النقطة.

إشارة قَ(س) = ٣س^{٢} − ٦س

∞ - ++++ ∴ ---- ٢ ++++ ∞

بما أن قَ(س) اقتران تربيعي لذا بين الجذرين إشارته عكس إشارة أ وهو سالب وخارج الجذرين نفس إشارة أ وهو موجب.

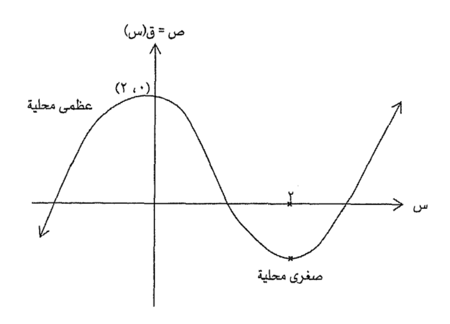
لذا ومن الشكل ق (صفر) عظمى محلية

ق (٢) صغرى محلية

وهكذا فالعظمى المحلية = ق (٠) = (٠)^{٣} − ٣(٠) + ٢ = ٢

والصغرى المحلية = ق (٢) = (٢)^{٣} – ٣× ٢^{٢} + ٢ = - ٢

وكلاهما ليس مطلقة كون الاقتران غير محدود من الطرفين وللتحقق من ذلك نرسم شكلاً تقريباً للاقتران كما يلي.



ولا قيم قصوى مطلقة للاقتران

⇦مثال: إذا كان ق(س) = $\sqrt{}$ جا س في الفترة [٠ ، π]

أوجد القيم القصوى أن وجدت ونوعها

الحل:

بما أن جا س اقتران متصل في الفترة [٠ ، π] كونه دائري (الجيب وجيب التمام) بشكل خاص

فإن ق(س) = $\sqrt{}$ جا س متصل في الفترة نفسها كون جا س في الفترة [٠ ، π]

موجب أي أكبر من صفر.

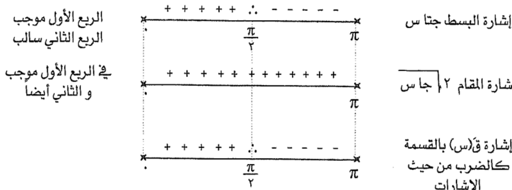
قَ (س) = $\frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر التربيعي}}{\text{ضعف الجذر التربيعي}}$ = $\frac{\text{جتا س}}{\text{٢}\sqrt{\text{جا س}}}$

= صفر (عند النقط الحرجة التي تعين قيم قصوى)

ومنها جتا س = صفر

∴ ∢ س = $\frac{\pi}{2}$ هناك نقطة حرجة يمكن أن تُعين قيم قصوى نجد إشارة

قَ (س) = $\frac{\text{جتا س}}{2\sqrt{\text{جا س}}}$ في الفترة [٠ ، π] هكذا



ومنه ق ($\frac{\pi}{2}$) عظمى محلية

ثم ق(٠) صغرى مطلقة (بداية التزايد)

ثم ق (π) صغرى مطلقة (نهاية التناقص)

العظمى المحلية = ق ($\frac{\pi}{2}$) = $\sqrt{\text{جا } \frac{\pi}{2}}$ = $\sqrt{1}$ = ١

الصغرى المطلقة ق (٠) = $\sqrt{\text{جا صفر}}$ = $\sqrt{\text{صفر}}$ = صفر

و ق (π) = $\sqrt{\text{جا } \pi}$ = $\sqrt{\text{صفر}}$ = صفر

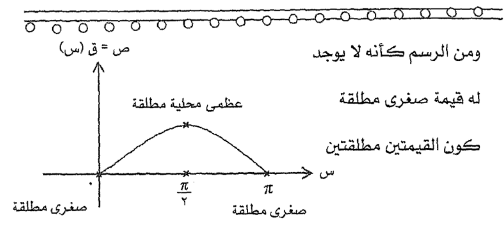
و ق ($\frac{\pi}{2}$) العظمى المحلية حيث لها أكبر منها في مجال الاقتران فهي عظمى مطلقة ومن هنا يمكن رسم الاقتران:

ق (س) = $\sqrt{\text{جاس}}$ في الفترة [٠ ، π]

ومن الرسم كأنه لا يوجد

له قيمة صغرى مطلقة

كون القيمتين مطلقتين



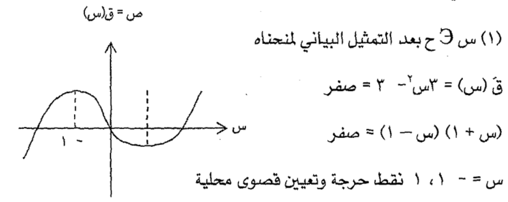
وأفضل طريقة لتعيين القيم القصوى المطلقة هي:

أكبر قيمة للاقتران (بعد مقارنة القيم العظمى المحلية) = القيمة العظمى المطلقة له

أصغر قيمة للاقتران (بعد مقارنة القيم الصغرى المحلية) = القيمة الصغرى المطلقة له

كما في المثال التالي واستعانة بالأشكال التالية:

⇦مثال: جد أكبر قيمة وأصغرها إن وجدت للاقتران ق(س) = س^{٣} − ٣س في الحالات التالية:



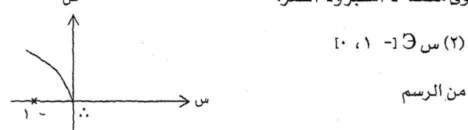
(١) س ∈ ح بعد التمثيل البياني لمنحناه

قَ (س) = ٣س^{٢}− ٣ = صفر

(س + ١) (س − ١) = صفر

س = - ١ ، ١ نقط حرجة وتعيين قصوى محلية

وأما الاقتران فلا يوجد له قيم قصوى مطلقة كونه غير محدود لذا لا يوجد قيم قصوى مطلقة لا أكبر ولا أصغر.



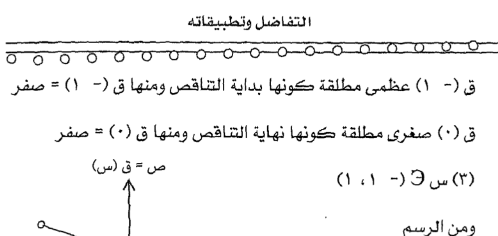
(٢) س ∈ [- ١ ، ٠]

من الرسم

ق (- ١) عظمى مطلقة كونها بداية التناقص ومنها ق (- ١) = صفر

ق (٠) صغرى مطلقة كونها نهاية التناقص ومنها ق (٠) = صفر

(٣) س ∈ (- ١ ، ١)



ومن الرسم

لا يوجد قيم قصوى مطلقة

لأن ق (١)، ق (- ١) غير

معرفة كون الاقتران لا يوجد له أطراف

(٤) س ∈ (- ٣، ٠]

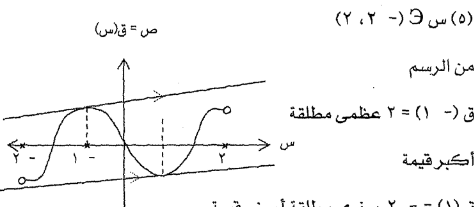
ومن الرسم

ق (- ١) = ٢ عظمى مطلقة فقط

ولا يوجد له قيمة صغرى مطلقة

كونه محدود وغير معرف عند س = - ٣

(٥) س ∈ (- ٢ ، ٢)



من الرسم

ق (- ١) = ٢ عظمى مطلقة

أكبر قيمة

ق (١) = - ٢ صغرى مطلقة أصغر قيمة

كون للاقتران لا يوجد أطراف وكون

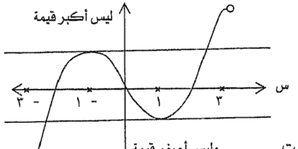
ق (٢) = ٢^{٣} — ٣ (٢) = ٨ — ٦ = ٢

وكون ق (- ٢) = - ٢ ^{٣} — ٣ (-) = - ٢

ولأن عند الأطراف أكبر قيمة له أقل من ٢ كونه غير معرف عند س = ٢

وأصغر قيمة له أكبر من - ٢ كونه غير معرف عند س = - ٢

(٦) س ∈ (- ٣، ٣)



ومن الرسم

ق (- ١) = عظمى محلية

وليست مطلقة كونها ليست

أكبر قيمة بل ق (٢,٥) مثلاً أكبر من (- ١)

لأن ق (٢,٥) = (٢,٥)^{٣} — ٣ (٢,٥) = ١٥,٦٢٥ — ٧,٥ = ٨,١٢٥ وهذا أكبر من ق(- ١)

لذلك فإن ق (- ١) عظمى محلية وليست مطلقة كما هو واضح أعلاه

وكذلك ق (١) = - ٢ صغرى محلية وليست مطلقة

كون ق (- ٢,٥) مثلاً أصغر من ق (١)

لأن (- ٢,٥) = - ١٥,٦٢٥ — ٥ (- ٢,٥) = - ٨,١٢٥

لذلك لا يوجد للاقتران قيم مطلقة إطلاقاً

خامساً: إشارة المشتقة الثانية قً (س):

تعتبر إشارة قً (س) مؤشراً لمعرفة تقعر الاقتران، ولإيجاد نقط انعطافه كما

وتعتبر المشتقة الثانية اختباراً جيداً لاكتشاف القيم القصوى بأنواعها وإيجادها، ثم لا تنس استقراء الرسم ورسم المنحنيات للاقترانات وعلى وجه الخصوص كثيرات الحدود منها.

♦ التقعر Concavity

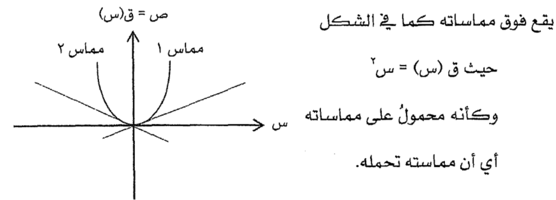
والتقعر يكون باتجاهين أو أكثر وسنقتصر على التقعر للأعلى ثم للأسفل

يُقال للاقتران ق (س) أنه مقعر للأعلى Concave Upward إذا كان منحناه يقع فوق مماساته كما في الشكل

حيث ق (س) = س^{٢}

وكأنه محمولُ على مماساته

أي أن مماسته تحمله.



ويقال للاقتران ق(س) أنه مقعر للأسفل Concave Downward إذا كان منحناه يقع تحت مماساته كما في الشكل حيث ق (س) = — س^{٢} وكأنه يحمل مماساته.

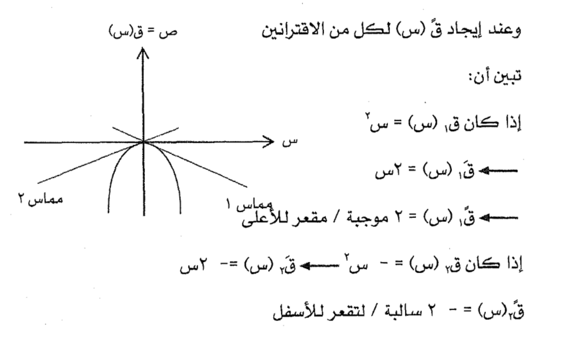
وعند إيجاد قً (س) لكل من الاقترانين

تبين أن:

إذا كان ق$_{١}$ (س) = س^{٢}

⟵ قَ$_{١}$ (س) = ٢س

⟵ قً$_{١}$ (س) = ٢ موجبة / مقعر للأعلى



إذا كان ق$_{٢}$ (س) = - س^{٢} ⟵ قَ$_{٢}$ (س) =- ٢س

قً$_{٢}$(س) = - ٢ سالبة / لتقعر للأسفل

لذا يمكن التوصل إلى النظرية التالية التي تربط التقعر بإشارة قً(س) كما في هذه السطور:

ليكن ق(س) اقتران متصل على [أ ، ب] وقابل للاشتقاق في (أ ، ب) ولتكن قَ(س)، قً(س) معرفتان على (أ ، ب) فإنه:

إذاكانت قً (س) موجبة لجميع قيم س $\ni$ (أ ، ب) فإن منحنى ق (س) مقعر للأعلى في نفس الفترة.

وإذا كانت قً (س) سالبة لجميع قيم س $\ni$ (أ ، ب) فإن منحنى ق (س) مقعر للأسفل في نفس الفترة.

⇦مثال: اوجد مجالات التقعر لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٤} – ٤س^{٣} + ٢س^{٢} + ٢س – ٣

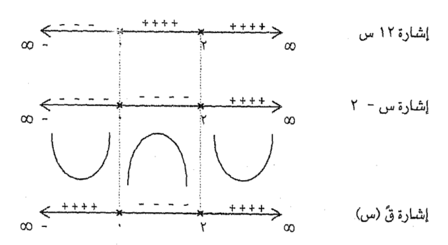
قَ (س) = ٤س^{٣} + ١٢ س^{٢} + ٢

قً (س) = ١٢ س^{٢} – ٢٤ س = صفر

١٢ س (س – ٢) = صفر

س = {صفر، ٢}

والآن نبحث في إشارة قً (س)



ق (س) مقعر لأعلى في الفترات (- ∞، ٠] ⋃ [٢، ∞)

و ق (س) مقعر لأسفل في الفترة [٠ ، ٢]

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن، ماذا يحدث لمنحنى الاقتران عندما قً (س$_1$) = صفر ، أي عند النقط س = صفر، ٢

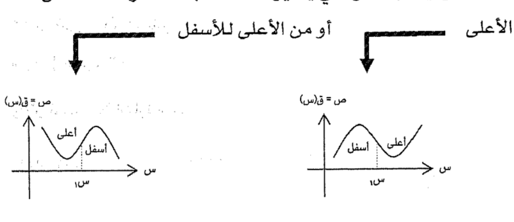
الجواب المفيد وبإيجاز شديد:

إذا غيرت قً (س) من إشارتها قبل س$_1$ وبعدها فإن:

(س$_1$، ق (س$_1$)) تسمى نقطة انعطاف Inflection Point وهذا يقودنا إلى التعريف التالي:

نقطة الانعطاف:

هي النقطة (س$_1$، ق (س$_1$)) الواقعة في مجال الاقتران ق(س) القابل للاشتقاق في مجاله والتي يتغير عندها اتجاه تقعر منحناه من الأسفل إلى الأعلى أو من الأعلى للأسفل



والتي عندها قً (س$_1$)= صفر

شرط تغير منحنى ق (س) من تقعره وهذا يجسد تغير قً (س$_1$) من إشارتها

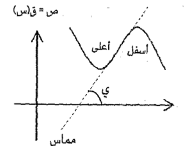
لذلك: تسمى النقطة (س$_1$، ق (س$_1$)) نقطة انعطاف المنحنى الاقتران ق(س)

إذا تحققت الشروط التالية معاً.

- ق (س) متصل عند س = $س_1$
- قَ ($س_1$) موجودة
- قً ($س_1$) = صفر وتغير قً (س) من إشارتها قبل وبعد $س_1$
- قًّ ($س_1$) = موجودة – شرط إضافي للتحقق فقط

وفي هذه الحالة تسمى زاوية ميل المماس المرسوم للمنحنى عند نقطة الانعطاف (عن وجدت) زاوية الانعطاف Inflection Angle ويرمز لها بالرمز ي حيث ظاي = قَ ($س_1$)

كما في الشكل



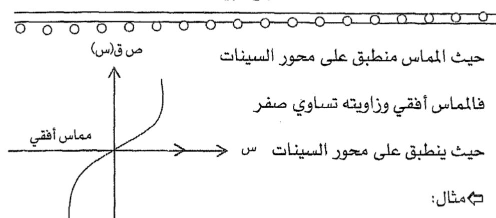
أي أن ظاي = قَ ($س_1$)

حيث ($س_1$، ق ($س_1$)) نقطة انعطاف

وهناك نقطة الانعطاف الأفقي Horizntal Intlection إذا تحققت الشروط التالية معاً:

- ق (س) متصل عند س = $س_1$
- ق ($س_1$) يغير من اتجاه تقعره حول ي
- قَ ($س_1$) = صفر
- قً ($س_1$) = صفر، المشتقتان متساويتان وكل منهما تساوي صفر

وعندها يكون قياس زاوية الانعطاف ي يساوي صفر دائماً وأشهر مثال على ذلك هو ق (س) = $س^3$ كما في الشكل



حيث المماس منطبق على محور السينات

فالمماس أفقي وزاويته تساوي صفر

حيث ينطبق على محور السينات

⇦مثال:

اوجد نقطة الانعطاف وزاوية الانعطاف عند كل نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران ق (س) = $س^٤$ — $٤س^٣$

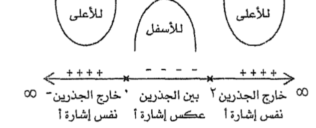
ق (س) متصل كونه كثير حدود

قَ (س) = $٤س^٣$ — ١٢ $س^٢$

قً (س) = ١٢ $س^٢$ — ٢٤ س = صفر

١٢ س (س — ٢) = صفر

س = صفر، ٢ هناك نقط قد تصبح نقط انعطاف إذا تغيرت قً (س) من إشارتها لنبحث إشارة قً (س)



أي أن (٠، ق (٠)) نقطة انعطاف

وكذلك (٢، ق (٢)) نقطة انعطاف أخرى

ولما كانت ق (٠) = $(٠)^٤$ — ٤ $(٠)^٣$ = صفر

∴ (٠ ، ٠) نقطة انعطاف أولى

ق (٢) = $(٢)^{٤}$ – ٤ $(٢)^{٣}$ = ١٦ – ٣٢ = – ١٦

∴ (٢ ، – ١٦) نقطة انعطاف أخرى

ظا ي = قَ (٠) = ٤ $(٠)^{٣}$ – ١٢ $(٠)^{٢}$ = صفر

∴ ∡ $ي_{١}$ = صفر زاوية الانعطاف الأولى

ولما كانت قَ (س) = صفر وكذلك قً (٠) = صفر فالانعطاف أفقي

∡ $ي_{٢}$ = قَ (٢) = ٤ $(٢)^{٣}$ – ١٢ $(٢)^{٢}$ = ٣٢ – ٤٨ = – ١٦

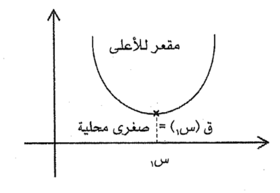
∴ $ي_{٢}$ = $ظا^{-١}$ (– ١٦) زاوية الانعطاف الثانية

لنعود مرة أخرى إلى القيم القصوى وكيفية إيجادها ولكن باختبار المشتقة الثانية قً (س) والاختبار بإيجاز موضح بالنظرية التالية:

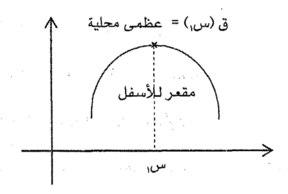
نظرية القيم القصوى المحلية باختبار المشتقة الثانية قً $(س_{١})$:

ليكن ق (س) متصل على [أ ، ب] ولتكن قَ (س) ، قً (س) معرفتين على (أ ، ب) ولتكن قَ $(س_{١})$ = صفر، لكل $س_{١}$ ∈ (أ ، ب) عندها نقول:

إذا كانت قً $(س_{١})$ > صفر فإن للاقتران قيمة صغرى محلية عند $س_{١}$ كونه مقعر للأعلى كما في الشكل



إذا كانت قً (س$_1$) < صفر فإن للاقتران قيمة عظمى محلية عند س$_1$ كونه مقعر للأسفل كما في الشكل



إذا كانت قً (س$_1$) = صفر تكون قً (س) قدفشلت في الاختبار عندها نعود إلى اختبار المشتقة الأولى قَ (س) لإيجاد القيم القصوى كما مر سابقاً.

ونعيد بنود النظرية بإيجاز شديد هكذا:

تحدد النقطة (س$_1$، ق (س$_1$)) قيمة صغرى محلية عندما

قَ (س$_1$) = صفر
و قً (س$_1$) > صفر
معاً

و تحدد النقطة (س$_1$، ق (س$_1$)) = قيمة عظمى محلية عندما

قَ (س$_1$) = صفر
و قً (س$_1$) < صفر
معاً

لا تحدد النقطة (س$_1$، ق (س$_1$)) أي قيمة قصوى (صغرى أو عظمى) عندما

قَ (س$_1$) = صفر
و قً (س$_1$) = صفر
معاً

لذا نترك اختبار قً (س$_{1}$) ونعود إلى اختبار قَ (س$_{1}$)

كما في المثال:

أوجد باختبار قً (س) القيم القصوى المحلية للاقتران

ق (س) = ٣س^{4} + ٤س^{3} - ١٢ س^{2} + ٥

قَ (س) = ١٢ س^{3} + ١٢ س^{2} – ٢٤ س = صفر ⟵ س^{3} + س^{2} – ٢ س = صفر

س (س٢ + س – ٢) = صفر

س (س + ٢) (س – ١) = صفر

ومنها س = {- ٢، صفر، ١} هناك نقط حرجة يمكن أن تحدد قيم قصوى

وباختبار قً (س) نجد اشارتها عند كل من النقط: كما يلي

قً (س) = ٣٦ س^{2} – ٢٤ س – ٢٤

قً (- ٢) = ٣٦ (- ٢)^{2} – ٢٤ (- ٢) – ٢٤ = ٧٢ موجبة

∴ قَ (- ٢) صغرى محلية = - ٢٧ الصغرى المحلية

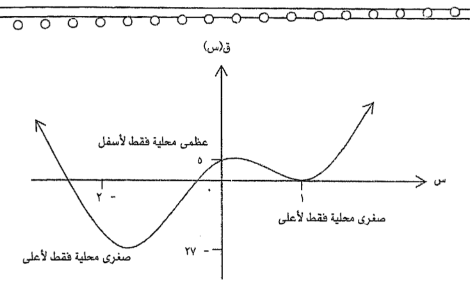
قً (٠) = ٣٦ (٠)^{2} + ٢٤ (٠) – ٢٤ = - ٢٤ سالبة

∴ قَ (٠) عظمى محلية = ٥ العظمى المحلية

قً (١) = ٣٦ (١)^{2} + ٢٤ (١) – ٢٤ = ٣٦ موجبة

∴ قَ (١) صغرى محلية = صفر الصغرى المحلية الأخرى

وبناءً على ما سبق نستطيع رسم منحنى الاقتران ق (س) التقريبي كما يلي:



والمنحنى لكثير حدود من الدرجة الرابعة كما ترى

والآن سنناقش هذا البند تحت اسم:

استقراء الرسم Graphing Induction

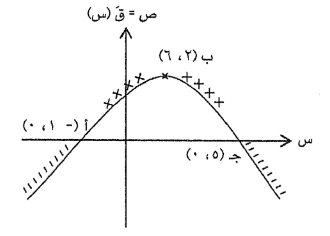
واستقراء الرسم فرع من فروع الرياضيات يبحث في منحنيات الاقترانات ومنحنيات مشتقاتها الأولى والثانية على السواء، يحث على التفكير ويدل على القدرة والفهم والذكاء عند تحليل المنحنيات.

كما يعتمد على التحصيل العلمي والمعرفة التامة بالنظريات والقوانين الرياضية لاستنباط خصائص تلك الاقترانات من حيث التزايد والتناقص والتقعر لإيجاد النقط الحرجة ونقط الانعطاف وأنواعه ولحساب القيم القصوى العظمى والصغرى، ولكنه يتطلب بعض المعلومات الأساسية المتعلقة بإشارتي قَ (س)، قً (س) كما يلي مع الاستعانة بالرسم.

لذا يجب دراسة الجدول التالي لفهم العلاقة بين منحنيات ق (س)، قَ (س)، قً (س)

إذا كان ق (س) ↓	فإن قَ (س) ↓	وإن قً (س) ↓
متزايد	قَ (س) > صفر	
متناقص	قَ (س) < صفر	
ثابت	قَ (س) = صفر	
يحدد نقطة حرجة $س_1$	قَ ($س_1$) = صفر أو غير موجود	
مقعر لأعلى	قَ (س) متزايد	قً (س) > صفر
مقعر لأسفل	قَ (س) متناقص	قً (س) < صفر
يحدد نقطة انعطاف $س_1$	يحدد نقطة حرجة للاقتران قَ (س)	قً ($س_1$) = صفر

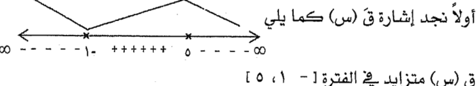
وسوف نستقرئ الرسم من خلال منحنيات ق (س)، قَ (س)، قً (س) وهكذا.



ليكن الرسم المجاور يمثل منحنى قَ (س) حيث ق (س) كثير حدود من الدرجة الثالثة اعتمد على الشكل المجاور للإجابة على كل من:

(١) أوجد فترات التزايد والتناقص:

أولاً نجد إشارة قَ (س) كما يلي



ق (س) متزايد في الفترة [- ١، ٥]

ق (س) متناقص في الفترة (- ∞، - ١] ∪] ٥، ∞]

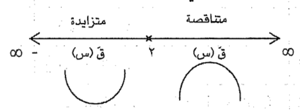
(٢) أوجد قيم س، الحرجة

عندما س، = {- ١، ٥} هناك نقط حرجة

(٣) أوجد فترات التقعر

تزايد قَ (س) ⟵ يعني ق (س) مقعر لأعلى كون قً (س) > صفر

تناقص قَ (س) ⟵ يعني ق (س) مقعر لأسفل كون قً (س) < صفر



ق (س) مقعر لأعلى في الفترة (- ∞، ٢]

ق (س) مقعر لأسفل في الفترة [٢، ∞)

(٤) أوجد نقطة الانعطاف

نقطة انعطاف الاقتران هي نقطة حرجة للمشتقة الأولى وهي النقطة التي عندها يغير الاقتران من تقعره

∴ (٢، ق(٢)) نقطة انعطاف

وعند قً (٢) = صفر

(٥) أوجد ظا زاوية الانعطاف

ظا ي = قَ (٢) = ٦ كما هو في الشكل

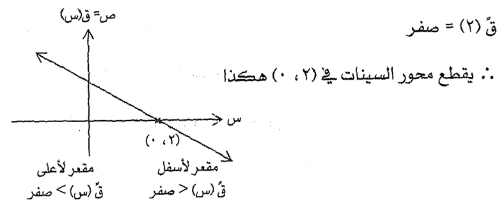
∴ زاوية الانعطاف هي الزاوية التي ظا $^{-1}$ = (٦)

(٦) أرسم قً (س)

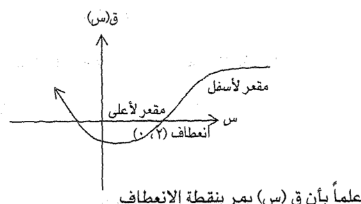
بما أن قَ (س) من الدرجة الثانية فإن قً (س) من الدرجة الولى

قً (٢) = صفر

∴ يقطع محور السينات في (٢ ، ٠) هكذا



(٧) أرسم ق (س) من الدرجة الثالثة



علماً بأن ق (س) يمر بنقطة الانعطاف

⇦مثال: ليكن الرسم المجاور منحنى قً (س) حيث ق (س) كثير حدود من الدرجة الرابعة واعتماداً على الرسم أوجد

ص = قً (س)

س

(١ ، ٠)

ب (٤ ، ٠)

(١) فترات تقعر قً (س)

نجد إشارة قً (س)

هكذا

للأعلى للأسفل للأعلى

+ + + +   - - - -   + + + +

- ∞   ٠   ٤   ∞

ق (س) مقعر لأعلى في الفترات: (- ∞ ، ٠ [⋃] ٤ ، ∞)

ق (س) مقعر لأسفل في الفترة [٠ ، ٤]

(٢) أوجد نقط الانعطاف

س١ = [٠ ، ٤] نقط انعطاف

لأن قً (٠) = صفر ، قً (٤) = صفر

(٣) أوجد فترات تقعر المنحنى قَ (س) المستقيم الأول

كون تزايد قَ (س) معناه تقعر ق (س) {أقل درجة}

كون تزايد قً (س) معناه تقعر قَ (س) {أقل درجة}

∴ قَ (س) مقعر لأعلى في (- ∞ ، ٢] ومقعر لأسفل في [٢ ، ∞)

(٤) إذا علمت أن للاقتران ٣ نقاط حرجة هي {- ٢ ، ٢ ، ٦} أوجد

«أ» القيم القصوى للاقتران

قَ (- ٢) = صفر لأنها حرجة للاقتران ق (س)

قً (س) > صفر كما في الشكل

∴ ق (- ٢) صغرى محلية

وكذلك قَ (٢) = صفر لأنها حرجة للاقتران

قً (س) < صفر كما في الشكل

∴ ق (٢) عظمى محلية

وكذلك قَ (٦) = صفر من الشكل المجاور كونها حرجة للاقتران

قَ (٦) > صفر من الشكل المجاور

∴ ق (٦) صغرى محلية

«ب» أوجد فترات تزايد وتناقص ق(س)

ق (س) متناقص في الفترة



ومن الرسم:

ق (س) متناقص في الفترات (- ∞، - ٢] ∪ [٢، ٦]

ق (س) متزايد في الفترات [- ٢، ٢] ∪ [٦، ∞)

⇦مثال: بين أن الاقتران ق (س) = جاس (١ + جتا س) قيمته عظمى محلية عندما س = $\frac{\pi}{٣}$

البيان يكمن في قيمة قَ (س) أي:

قَ (س) = صفر كونها نقطة حرجة

∴ قَ (س) = الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

= (جاس) (- جاس) + (١ + جتاس) (جتاس)

= - جا^{٢}س + جتاس + جتا^{٢}س = صفر

والآن نعوض $\frac{\pi}{٣}$ لتحقيق قَ ($\frac{\pi}{٣}$) = صفر

∴ قَ ($\frac{\pi}{٣}$) = - جا^٢ $\frac{\pi}{٣}$ + جتا $\frac{\pi}{٣}$ + جتا^٢ $\frac{\pi}{٣}$

= - ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)^٢ + $\frac{١}{٢}$ + ($\frac{١}{٢}$)^٢ = $\frac{- ٣}{٤}$ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$

= $\frac{- ٣ + ٢ + ١}{٤}$ = صفر هذا القسم الأول

ثم نجد قً (س) هكذا :

- ٢ جاس × جتاس × ١ – (جاس) + ٢ جتاس (جاس) × ١

= - ٢ جاس جتاس – جاس – ٢ جتاس جاس = - جاس – ٤ جاس جتاس

= - جاس – ٢ جا٢س {جا٢س = ٢جاس جتاس}

قً ($\frac{\pi}{٣}$) يجب أن يكون سالب

ومنها قً ($\frac{\pi}{٣}$) = - جا $\frac{\pi}{٣}$ – ٢ جا٢ $\frac{\pi}{٣}$ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ - ٢ (× $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

= - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ - $\sqrt{٣}$

وهذه كمية سالبة

∴ عندما س = $\frac{\pi}{٣}$ هناك قيمة عظمى للاقتران

سادساً: مسائل على القيم القصوى

تظهر هذه المسائل بكثرة في الهندسة والفيزياء معاً ولكن بعد أن تصاغ هذه المسائل بشكل رياضي مجرد فإنه يمكن حلها بطرق التحليل الرياضي المتمثل بالاشتقاق وعلى الخطوات التالية:

إيجاد قَ (س) بعد صياغة السؤال على شكل اقتران يحوي «متغيراً واحداً فقط»

ثم جعل قَ (س) = صفر عند القيم العظمى والصغرى على السواء

ونستدل على هذه المسائل بوجود أكبر، أصغر، أقل، أكثر، أعظم، أدنى وغيرها من الألفاظ التي تدل على القيم القصوى.

مثال: عددان موجبان مجموعهما ٦٠ ومجموع مربعهما أقل ما يمكن؛ فما العددان ؟

نفرض أن العدد الأول س والثاني ص

والآن نطرد ص ونبقي س لنكون اقتران بمتغير واحد فقط هكذا

من المعطيات: مجموع العددين ٦٠

∴ س + ص = ٦٠

ومنها ص = ٦٠ – س العدد الثاني

أي أن العدد الأول = س ، والعدد الثاني = ٦٠ – س والمتغير واحد فقط

والآن نصوغ الاقتران هكذا:

ق (س) = (س)^{٢} + (٦٠ – س)^{٢} مجموع مربعهما أقل ما يمكن

أي أن قَ (س) = ٢س + ٢ (٦٠ – س) (- ١) = صفر

٢س – ١٢٠ + ٢س = صفر

٤ س = ١٢٠

س ٣٠ العدد الأول

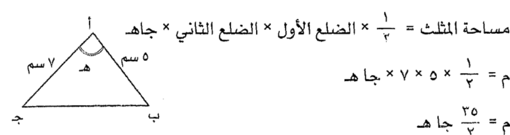
٦٠ – س = ٣٠ العدد الثاني

العددان = {٣٠، ٣٠}

وتحقق بأن مجموع مربعهما أقل ما يمكن أي قً (س) > صفر كونها قيمة صغرى

قً (س) = ٤ > صفر

⇦مثال: مثلث طولا ضلعيه ٥سم، ٧سم والزاوية المحصورة بينهما هـ جد قيمة الزاوية هـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.



مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × الضلع الأول × الضلع الثاني × جاهـ

م = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٧ × جا هـ

م = $\frac{٣٥}{٢}$ جا هـ

م' = $\frac{٣٥}{٢}$ [illegible] = صفر

[illegible] ـسر

ومنها [illegible] = $\frac{[illegible]}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$ ولكن مجموع قياسات زوايا المثلث π فقط

∴ ∢ هـ = $\frac{\pi}{٢}$ = ٩٠°

⇦مثال: يتحرك جسيم حسب العلاقة ف = ن^{٤} − ١٢ ن^{٣} + ٨ ن + ٥

أوجد أقل تسارع له

بما أن التسارع = فً المشتقة الثانية للمسافة بالنسبة للزمن

فإن أقل تسارع = (فً)َ = فً َ المشتقة الثالثة

ع = فَ = ٤ ن^{٣} − ٣٦ ن^{٢} + ٨

ت = فً = ١٢ ن^{٢} - ٧٢ ن

أقل تسارع = فٌ = ٢٤ ن - ٧٢ = صفر

ومنها ن = $\frac{٧٢}{٢٤}$ = ٣ ثواني

ومنها أقل تسارع: ت $|_{ن=٣}$ = ١٢ (٣)^{٢} − ٧٢ (٣) = ١٠٨ − ٢١٦ = - ١٠٨ م/ث^{٢}

سابعاً: التطبيقات الاقتصادية على التفاضل

من تطبيقات التفاضل العديدة والمفيدة المسائل الاقتصادية التي تتطلب من مستخدميها اتخاذ القرارات الصائبة في الشركات والمصانع لإنتاج العدد المناسب من السلع كون الإنتاج الأمثل هو الإنتاج الذي يؤدي إلى أكبر ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة التي تؤدي بدورها إلى أكبر ربح، وهذه التطبيقات لا تختص بالتجار ورجال الأعمال فقط بل إن معظم الناس في هذا الوقت بالذات يسيرون بخطى القيم القصوى في مجال الاقتصاد فهم يحبذون الحصول على أعلى الإيرادات ولا يفرطون إلا بأدنى المصروفات كي يوفروا من النقود ما يشاؤون.

وتتلخص هذه التطبيقات في هذه القوانين والمصطلحات:

عندما ينتج أحد المصانع س وحدة من سلعة ما في زمن معين ويبيعها بسعر الوحدة الواحدة ع وحدة نقدية يجد الخبير الاقتصادي في ذلك المصنع أمامه عدداً من القوانين نلخصها كما يلي:

ك (س): اقتران التكلفة الكلية Cost Function

د (س): اقتران الإيراد الكلي Verenue Function

ر (س): اقتران الربح الكلي Profit Function

والعلاقة بين هذه الاقترانات هي

ر (س) = د (س) — ك (س) .... (١)

والجدير بالذكر أن المشتقة الأولى لاقتران التكلفة الكلية ك (س) تسمى التكلفة الحدية وهي معدل تغير التكلفة بالنسبة لعدد الوحدات المنتجة ويُرمز لها بالرمز كَ (س) والمشتقة الأولى لاقتران الإيراد الكلي د (س) تسمى الإيراد الحدي

وهي معدل التغير في الإيراد بالنسبة للوحدة المباعة في اللحظة التي يباع فيها س من الوحدات ويرمز لها بالرمز دَ (س)

وكذلك المشتقة الأولى لاقتران الربح الكلي ر(س) تسمى الربح الحدي وهي معدل التغير في الربح بالنسبة لعدد الوحدات س المباعة ويرمز لها بالرمز ر (س)

والعلاقة بين المشتقات الثلاث هي

رَ (س) = دَ (س) – كَ (س) .... (٢)

والإيراد الناتج عن بيع س وحدة من السلعة بسعر ع وحدة نقدية هو:

د (س) = عدد الوحدات المباعة × سعر الوحدة

أي أن د (س) = س × ع .... (٣)

وحتى يحقق المصنع أو الشركة أكبر ربح ممكن يجب أن نجعل:

(١) رَ (س) = صفر لتحقيق أكبر ربح

أو (٢) كَ (س) = صفر لتحقيق أقل تكلفة والتي تؤدي إلى أكبر ربح

أو (٣) دَ (س) = صفر لتحقيق أكبر إيراد والذي يؤدي إلى أكبر ربح

⇦مثال: وجدت شركة لإنتاج ألعاب الأطفال أن التكلفة الكلية ك (س) لإنتاج س لعبة هي بالتقريب ك (س) = ٢٠٠ – ٠,٥ س + ٠,٠٠٠١ س^{٢}

وأن الربح الناتج من بيع س وحدة هو ر (س) = ٠,٢

أوجد

(١) عدد اللعب اللازم إنتاجها حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن.

(٢) الإيراد الحدي والربح الحدي

الحل: بما أن ك (س) = ٢٠٠ — ٠,٠٥ س + ٠,٠٠٠١ س^{٢}

فإن كَ (س) = - ٠,٠٥ + ٠,٠٠٠٢ س = صفر (أكبر ربح أو أقل تكلفة)

$\frac{٠,٠٠٠٢س}{٠,٠٠٠٢}$ = $\frac{٠,٠٥}{٠,٠٠٠٢}$

س = $\frac{٠,٠٥}{٠,٠٠٠٢}$ = $\frac{٥٠٠}{٢}$ = ٢٥٠ لعبة يجب إنتاجها لتكون التكلفة أقل ما يمكن

وبما أن الإيراد الكلي من القانون: ر (س) = د (س) — ك (س)

ومنه ٠,٢س = د (س) — {٢٠٠ — ٠,٠٥س + ٠,٠٠٠١ س^{٢} }

أي أن ٠,٢س = د (س) — ٢٠٠ + ٠,٠٥ س — ٠,٠٠٠١ س^{٢}

ومنه د (س) = ٠,٢س + ٢٠٠ - ٠,٠٥ س + ٠,٠٠٠١ س^{٢}

= ٠,٠٠٠١ س^{٢} + ٠,١٥ س + ٢٠٠

وعندما س = ٢٥٠

∴ د (٢٥٠) = (٠,٠٠٠١) (٢٥٠)^{٢} + ٠,١٥ (٢٥٠) + ٢٠٠

= ٦,٢٥ + ٣٧٥ + ٢٠٠ = ٥٨١,٢٥

الإيراد الحدي = دَ (س) = ٠,٠٠٠٢ س + ٠,١٥

والربح الحدي = رَ (س) = ٠,٢

⇦مثال: وجد مصنع للأثاث أن التكلفة الكلية للإنتاج الأسبوعي من غرف النوم والتي عددها س تقدر بالاقتران:

ك (س) = س^{٣} — ٣س^{٢} — ٨٠س + ٥٠

فإذا بيعت كل غرفة نوم بمبلغ ٢٨٠٠ دينار

ماهو الإنتاج الأسبوعي من غرف النوم ليحقق المصنع أكبر ربح ممكن ؟

الحل: بما أن ر (س) = د (س) – ك

وأن د (س) = س × ع = ٢٨٠٠ × س = ٢٨٠٠س

∴ ر (س) = ٢٨٠٠س – (س^{٣} – ٣س^{٢} – ٨٠س + ٥٠٠)

ومنه ر (س) = ٢٨٠٠س – س^{٣} + ٣س^{٢} + ٨٠س + ٥٠٠

ولتحقيق أقصى ربح ممكن، رَ (س) = صفر

∴ رَ (س) = ٢٨٠٠ - ٣ س^{٢} + ٦س + ٨٠ = صفر

وبعد تبسيط المعادلة وترتيبها:

س^{٢} – ٢س – ٩٦٠ = صفر

(س – ٣٢) (س + ٣٠) = صفر

س – ٣٢ = صفر

س = ٣٢ غرفة نوم يجب ان ينتج المصنع أسبوعياً لتحقيق أقصى الأرباح.

(٢١ – ٥) أمثلة محلولة على التفاضل

مثال١ : أوجد قَ (س) لكلٍ من الاقترانات التالية بواسطة التعريف

(١) ق (س) = $\text{س}^{٢}$

$$\text{الحل: قَ (س)} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق (س + هـ)} - \text{ق (س)}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س + هـ})^{٢} - \text{س}^{٢}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{هـ س} + \text{هـ}^{٢} - \text{س}^{٢}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\,\text{هـ س} + \text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{هـ (٢س + هـ)}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} (\text{٢س + هـ})$$

$$= \text{٢س}$$

(٢) ق (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ ، س $\neq$ صفر

$$\text{الحل: قَ (س)} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق (س + هـ)} - \text{ق (س)}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{\text{س + هـ}} - \frac{١}{\text{س}}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{س} - \text{س} - \text{هـ}}{\text{س (س + هـ)}}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{-\text{هـ}}{\text{س (س + هـ)}} \times \frac{١}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{-١}{\text{س (س + هـ)}} = \frac{-١}{\text{س (س + ٠)}} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}$$

(٣) ق (س) = $\sqrt{\text{س + ١}}$ ، س > −١ حيث س + ١ > صفر ، س > −١

$$\text{الحل: قَ (س)} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق (س + هـ)} - \text{ق (س)}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{س + هـ + ١} - \sqrt{س + ١}}{هـ} \times \frac{\sqrt{س + هـ + ١} + \sqrt{س + ١}}{\sqrt{س + هـ + ١} + \sqrt{س + ١}}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{س + هـ + ١ - س - ١}{هـ \left(\sqrt{س + هـ + ١} + \sqrt{س + ١}\right)}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ}{هـ \left(\sqrt{س + هـ + ١} + \sqrt{س + ١}\right)}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{\sqrt{س + هـ + ١} + \sqrt{س + ١}} = \frac{١}{٢\sqrt{س + ١}}$$

ويمكن التحقق من صحة الحل بواسطة القاعدة:

$ق(س) = \sqrt{هـ(س)}$ ⟵ فإن $ق'(س) = \frac{هـ'(س)}{٢\sqrt{س + ١}}$

والتفسير: مشتقة الاقتران المجذور في الجذر التربيعي = $\frac{\text{مشتقة ما بداخله}}{\text{ضعف الجذر التربيعي}}$

أي أن $\sqrt{س + ١} = \frac{(س + ١)'}{٢\sqrt{س + ١}} = \frac{١}{٢\sqrt{س + ١}}$ نفس الجواب

مثال٢: أوجد

(١) $ق'(٢)$ إذا كان $ق(س) = ١ - س^٢$

الحل: $ق'(س) = -٢س$

$ق'(٢) = -٢(٢) = -٤$

(٢) $ق'(-٣)$ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ & ، س \leq ١ \\ ٢س - ١ & ، س > ١ \end{cases}$

الحل: نفرط التعريف عند الاشتقاق هكذا

١

قَ (س) = $\begin{cases} \text{٢س} & \text{، س < ١ القاعدة الأولى} \\ ٢ & \text{، س = ١} \\ ٢ & \text{، س > ١ القاعدة الثانية} \end{cases}$

ولكون:

$\text{قَ}_{+}(١) = \text{قَ}_{-}(١) = ٢$

فإن قَ (١) = ٢ كما هو واضح أعلاه

∴ قَ (- ٣) = - ٣ (٢) = - ٦ حسب القاعدة الأولى

⇦مثال٣: أوجد معادلة المماس المرسوم للمنحنى ق (س) = $\frac{١}{\text{س} + ٢}$ ، س ≠ - ٢ عند النقطة (- ٣، - ١) وكذلك أوجد معادلة العمودي عليه عند تلك النقطة

الحل: في البداية نعوض النقطة (- ٣، - ١) لمعرفة فيما إذا كانت هي نقطة التماس أم لا.

قَ (- ٣) = $\frac{١}{-٣ + ٢} = \frac{١}{-١} = -١$

∴ (- ٣، - ١) تقع على المنحنى وعلى المماس فهي نقطة التماس.

بما أن $\text{م}_{\text{المماس}} = \frac{\text{المقام × مشتقة البسط − البسط × مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

$= \frac{(\text{س} + ٢) \times \text{صفر} - (١)(١)}{(\text{س} + ٢)^{٢}} = \frac{-١}{(\text{س} + ٢)^{٢}}$

فإن قَ (- ٣) = $\frac{-١}{(\text{س} + ٢)^{٢}} = \frac{-١}{(-١)^{٢}} = -١$

معادلة المماس:

ص – ص$_1$ = م $_{\text{المماس}}$ (س – س$_1$)

ص – (- ١) = - ١ (س – (- ٣))

ص + ١ = - س - ٣

ص = - س - ٣ - ١ = - س - ٤

∴ معادلة المماس: ص = - س - ٤

معادلة العمودي عليه عند نقطة التماس

ص – ص$_1$ = م $_{\text{المماس}}$ (س – س$_1$)

لكن م $_{\text{العمودي}}$ = $\frac{-1}{\text{م}_{\text{مماس}}}$ = $\frac{-1}{-1}$ = ١ كون م $_{\text{المماس}}$ × م $_{\text{العمودي عليه}}$ = - ١

(كونهما متعامدان)

ص – (- ١) = - ١ (س – (- ٣))

ص + ١ = س + ٣

ص = س + ٣ - ١ = س + ٢

معادلة العمودي: ص = س + ٢

⇦مثال٤: إذا كان ق (س) = { (س + ١)^2 ، س ≥ صفر ؛ (س - ١)^2 ، س < صفر }

أوجد قَ (س)، قَ (- ٢)، قَ (صفر)، قَ (٢)، قً (س)

الحل: نفرط التعريف عند الاشتقاق

قَ (س) = { ٢(س + ١)(١) ، س > صفر (مشتقة القوس × مشتقة ما بداخله)
غير موجودة ، س = صفر (مشتقة القوس × مشتقة ما بداخله)
٢(س - ١)(١) ، س < صفر (مشتقة القوس × مشتقة ما بداخله) }

لأن قَ (صفر) $\neq$ قَ (صفر) مع أن ق (س) متصل عند س = صفر
+ −

كون ٢ $\neq$ - ٢

∴ قَ (صفر) غير موجودة

قَ (س) = { ٢س + ٢ ، س < صفر القاعدة الأولى
غير موجودة ، س = صفر
٢س - ٢ ، س > صفر القاعدة الثانية

قَ (- ٢) = ٢ (- ٢) + ٢ = - ٢ نأخذ القاعدة الأولى

قَ (صفر) غير موجودة كما هو واضح أعلاه

قَ (٢) = ٢ (٢) - ٢ = ٤ – ٢ = ٢ نأخذ القاعدة الثانية

قً (س) = { ٢ ، س < صفر
٢ ، س = صفر
٢ ، س > صفر

لاحظ أن قَ (صفر) غير موجودة، لكن قً (صفر) موجودة = ٢

هذا يحدث لأن ق (س) متصل عند س = صفر كما هو واضح أعلاه

⇦مثال٥:

(١) أوجد قَ (س) للاقتران ق (س) = (س^{٢} - ١) (س - ٣)

(٢) أوجد قَ (١) للاقتران ق (س) = $\frac{\text{١ – س}^{٢}}{\text{١ + س}^{٢}}$

الحل:

(١) نستخدم قانون: مشتقة حاصل ضرب اقترانين كما يلي:

قَ (س) = الأول × مشتقة الثاني × الثاني × مشتقة الأول

= (س^{٢} - ١) (١) + (س - ٣) (٢س)

= س^{٢} - ١ + ٢س^{٢} - ٦س

= ٣س^{٢} - ٦س - ١

(١) نستخدم قانون: مشتقة خارج قسمة اقترانين كما يلي:

قَ(س) = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

= $\frac{(١ + س^{٢}) (-٢س) - (١ - س^{٢}) (٢س)}{(١ + س^{٢})^{٢}}$

= $\frac{-٢س - ٢س^{٣} - ٢س + ٢س^{٣}}{(١ + س^{٢})^{٢}}$ = $\frac{-٤س}{(١ + س^{٢})^{٢}}$

∴ قَ (١) = $\frac{-٤ (١)}{(١ + ١^{٢})^{٢}}$

= $\frac{-٤}{(٢)^{٢}}$ = $\frac{-٤}{٤}$ = -١

⇦مثال٦: أوجد إحداثيات نقط التماس التي يكون عندها المماسات المرسومة للاقتران ق (س) = (س - ٢) (س^{٢} - س - ١١) أفقية:

الحل: ميل المماس الأفقي = صفر حيث يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها صفر (كون ظا صفر = صفر، ميل المماس)

∴ م$_{\text{المماس}}$ = صفر

∴ قَ (س) = صفر ، مشتقة حاصل ضرب اقترانين

أي أن (س - ٢) (٢س - ١) + (س^{٢} - س - ١١) (١) = صفر

٢ س^{٢} - ٥س + ٢ + س^{٢} - س - ١١ = صفر

٣ س^{٢} − ٦س − ٩ = صفر   بالقسمة على ٣

س^{٢} − ٢س − ٣ = صفر

(س + ١) (س − ٣) = صفر

س$_{١}$ = − ١ ، س$_{٢}$ = ٣

∴ س$_{١}$ = ق (س$_{١}$) = ق (− ١) = (− ١ − ٢) (١ + ١ − ١١)

= (− ٣) (− ٩) = ٢٧

∴ (− ١ ، ٢٧) النقطة الأولى

وكذلك ص$_{٢}$ = ق (س$_{٢}$) = ق (٣) = (٣ − ٢) (٩ − ٣ − ١١)

= (١) (− ٥) = − ٥

∴ (٣، − ٥) النقطة الثانية

⇦ مثال٧: أوجد أ ، ب لتكون مشتقة الاقتران

ق (س) = { أ س^{٣} + ب س + ٢ ، س ≤ ٢
         { ب س^{٢} − أ ، س > ٢

اقتران متصل على ح.

ملحوظة:

لتكون قَ (س) اقتران متصل على ح يجب أن يكون ق (س) متصل على ح أيضاً.

أولاً: كون ق (س) اقتران متصلاً عند س = ٢

فإن نها$_{س ← ٢^{-}}$ ق (س) = نها$_{س ← ٢^{+}}$ ق (س) (النهاية موجودة وتساوي القيمة عند الحاجة)

نها ق (س) = أ (٢)^{٣} + ب (٢) + ٢ = ٨ أ + ٢ ب + ٢ من اليسار
س ← ٢$^{-}$

نها ق (س) = ب (٢)^{٢} - أ = ٤ ب – أ من اليمين
س ← ٢$^{+}$

∴ ٨ أ + ٢ ب + ٢ = ٤ ب – أ

∴ ٩ أ – ٢ ب = - ٢ ①

ق َ(س) = { ٣ أ س^{٢} + ب ، س < ٢
س = ٢
٢ ب س ، س > ٢

∴ ق َ(٢)$^{-}$ = ق َ(٢)$^{+}$ كونها متصلة أي المشتقة من اليسار = المشتقة من اليمين

∴ ٣ أ (٢)^{٢} + ب = ٢ ب (٢)

١٢ أ + ب = ٤ ب

١٢ أ – ٣ ب = صفر ②

وبحل المعادلتين بالحذف مثلاً

«لحذف ب»

- ٣ (٩ أ – ٢ ب = - ٢) ①
٢ (١٢ أ – ٣ ب = صفر) ②

- ٢٧ أ + ٦ ب = ٦

٢٤ أ – ٦ ب = صفر

- ٣ أ = ٦

أ = $\frac{٦}{-٣}$ = - ٢

لكن ١٢ أ - ٣ب = صفر

∴ ١٢ (- ٢) - ٣ب = صفر

- ٣ ب = ٢٤

ب = $\frac{٢٤}{-٣}$ = - ٨

∴ أ = - ٢ ، ب = - ٨

وتصبح قَ (س) = { - ٦س^{٢} - ٨ ، س < ٢
- ٣٢ ، س = ٢
- ١٦ س ، س > ٢

لاحظ أنها متصلة (قَ (س) متصلة)

مثال٨:

(١) إذا كان ق (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + س + ١

أوجد قً (س)

الحل:

قَ (س) = ($\frac{١}{٣}$) (٣) س^{٢} + ($\frac{١}{٢}$) (٢) س + ١

= س^{٢} + س + ١

قً (س) = ٢س + ١

قً (س) = ٢

وبقية المشتقات من ق$^{(٤)}$ (س) حتى ق$^{(ن)}$ (س) جميعها تساوي صفراً لكل منها

(٢) إذا كان ق (س) = $س^{٣} - \frac{١}{س^{٣}}$ ، س ≠ صفر

أوجد قً (س)

الحل: ق (س) = $س^{٣} - س^{-٣}$

قَ (س) = $٣ س^{٢} + ٣ س^{-٤}$

قً (س) = $٦ س - ١٢ س^{-٥} = ٦س - \frac{١٢}{س^{٥}}$ ، س ≠ صفر

(٣) إذا كان ص = $(\frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٢} س^{٢} + س)^{-١}$ أوجد $\frac{د ص}{د س}\Big|_{س=٦}$

الحل:

$\frac{د ص}{د س}$ = مشتقة القوس × مشتقة ما بداخله (قانون السلسلة)

$= - ١ (\frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٢} س^{٢} + س)^{-٢} (س^{٢} + س + ١)$

$= - \frac{٣٦ + ٦ + ١}{(\frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٢} س^{٢} + س)^{٢}}$

$\frac{د ص}{د س}\Big|_{س=٦} = \frac{٣٦ + ٦ + ١}{(\frac{١}{٣} (٢١٦) + \frac{١}{٢}(٣٦) + س)^{٢}} = \frac{٤٣}{(٧٢ + ١٨ + ٦)^{٢}}$

$= \frac{٤٣}{(٩٦)^{٢}} - = \frac{٤٣}{٩٦ \times ٩٦} - = \frac{٤٣}{٩٢١٦}$

⇦مثال٩: إذا كان ق (صفر) = ١ ، قَ (صفر) = ٢ ، قَ (٢) = ١

هـ (صفر) = ٢ ، هـَ (صفر) = ١ ، هـَ (٢) = صفر

أوجد (١) (ق ∘ هـ)َ (صفر)

(٢) (هـ ∘ ق)َ (صفر)

الحل: بما أن (ق ∘ هـ)َ (س) = قَ (هـ (س) × هـَ (س)

فإن (ق ∘ هـ)َ (صفر) = قَ (هـ (صفر) × هـَ (صفر)

= قَ (٢) × هـَ (صفر)

= (١) (١) =١

وبما أن (هـ ∘ ق)َ (س) = هـَ (ق(س)) × قَ (س)

فإن (هـ ∘ ق)َ (صفر) = هـَ (ق (صفر)) × قَ (صفر)

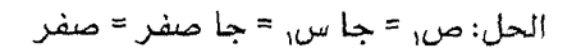
= هـَ (١) × قَ (صفر)

= (صفر) (٢) = صفر

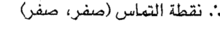
لاحظ ان (ق ∘ هـ)َ (س) ≠ (هـ ∘ ق)َ (س)

لأن تركيب الاقترانات غير تبديلي.

⇦مثال١٠: أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = جاس عند $س_1$ = صفر



الحل: $ص_1$ = جا $س_1$ = جا صفر = صفر



∴ نقطة التماس (صفر، صفر)

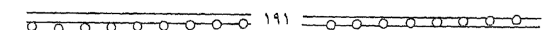
$م_{مماس} = \frac{د ص}{د س} \Big|_{س = صفر}$ = جتا صفر = ١

∴ معادلة المماس:

$ص - ص_1 = م_{مماس} (س - س_1)$

∴ ص − صفر = ١ (س − صفر)

ص = س معادلة المماس (كما هو واضح اعلاه)



⇦مثال١١: إذا كان $(س - ص)^{٢} - ص = صفر$

أوجد $\frac{د ص}{د س}$ ، ثم $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{(٢ ، ١)}$

الحل: إنه الاشتقاق الضمني إن كنت لا تدري! ولكن بعد فك القوس ؟

$$س^{٢} - ٢س ص + ص^{٢} - ص = صفر$$

$$٢س - \{ ٢س \times \frac{د ص}{د س} + ص \times ٢ \} + ٢ص . \frac{د ص}{د س} - ١ \frac{د ص}{د س} = صفر$$

$$٢س - ٢س . \frac{د ص}{د س} - ٢ص + ٢ص . \frac{د ص}{د س} - ١ \frac{د ص}{د س} = صفر$$

$$٢ص . \frac{د ص}{د س} - ٢س . \frac{د ص}{د س} - ١ \frac{د ص}{د س} = ٢ص - ٢س$$

$$\frac{د ص}{د س} (٢ص - ٢س - ١) = ٢ص - ٢س$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{٢ص - ٢س}{٢ص - ٢س - ١}$$

$$\therefore \left.\frac{د ص}{د س}\right|_{(٢ ، ١)} = \frac{٢(١) - ٢(٢)}{٢(١) - ٢(٢) - ١} = \frac{٢ - ٤}{٢ - ٤ - ١}$$

$$= \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$$

⇦مثال١٢: عيِّن مجالات التزايد والتناقص للاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} ٤ - س^{٢} & ، س < ١ \\ ٧ - ٢س & ، ١ \leq س < ٣ \\ ٣س - ١٠ & ، س \geq ٣ \end{cases}$$

الحل: نجد أولاً ق (س) لتحديد النقط الحرجة ومجالات التزايد والتناقص (نفرط التعريف عند الاشتقاق)

$$ق'(س) = \begin{cases} -٢س & ، س < ١ \\ -٢ & ، س = ١ \\ -٢ & ، ١ < س < ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٣ \\ ٣ & ، س > ٣ \end{cases}$$

إشارة قَ (س)

- ٢س = صفر ⟵ س = صفر نقطة حرجة

متزايد   متناقص   متزايد

النظر للشكل من هنا

$-\infty$ ++++ ٠ - - - ١ - - - - ٢ ++++ ∞

من الشكل أعلاه لإشارة قَ (س) نعين:

ق (س) متزايد في الفترات (- ∞، ٠] ⋃ [٢، ∞)

ق (س) متناقصة في الفترة [٠ ، ٢]

⇦مثال١٣: أوجد القيم القصوى المحلية لكل من الاقترانات التالية ثم حدد نوعها «صغرى محلية أو عظمى محلية»

(١) ق (س) = س^{٢} (١ – س) كحاصل ضرب اقترانين

نجد قَ (س) لتحديد النقط الحرجة التي يمكن أن تعين قيم قصوى.

الحل: قَ (س) = (س^{٢}) (- ١) + (١ – س) (٢س)

= - س^{٢} + ٢س – ٢ س^{٢}

∴ قَ (س) = – ٣ س^{٢} - ٢س

وبحل المعادلة (- ٣س^{٢} + ٢س = صفر)

٣ س^{٢} - ٢س صفر

س (٣س – ٢) = صفر

س = صفر ، س = $\frac{٢}{٣}$ هناك نقط حرجة يمكن أن تعين قيم قصوى

نجد قً (س) لتحديد نوع القيمة القصوى هكذا

قً (س) = - ٦س + ٢

قً (٠) = - ٦ (٠) + ٢ = + ٢/ موجبة ∴ صفر س

∴ الصغرى المحلية = ق (٠) = (٠)^{٢} (١ – صفر) = صفر

∴ صفر ⟵ قيمة صغرى محلية

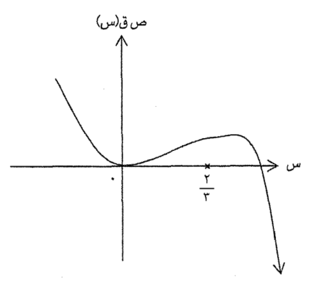
قً ($\frac{٢}{٣}$) = - ٦ ($\frac{٢}{٣}$) + ٢ = - ٤ + ٢ = - ٢ / سالبة / عظمى محلية

∴ ق ($\frac{٢}{٣}$) عظمى محلية

العظمى المحلية = ق ($\frac{٢}{٣}$) = ($\frac{٢}{٣}$)^{٢} (١ - $\frac{٢}{٣}$)

= ($\frac{٤}{٩}$) ($\frac{١}{٣}$) = $\frac{٤}{٢٧}$

والآن التمثيل البياني لمنحنى ق (س) التقريبي



(٢) ق (س) = جاس + جتا س ، ٠ < س < ٢π (لدورة واحدة فقط)

الحل:

ق َ(س) جتا س – جاس = صفر

$\frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ بالقسمة على جتا س

١ = ظا س

∴ ∢ س = $\frac{\pi}{4}$ في الربع الأول ، $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ في الربع الثالث

ولتمييزها إلى محلية عظمى أو صغرى نجد قً (س)

قً (س) = - جاس – جتاس = - ١ (جاس + جتاس)

قً ($\frac{\pi}{4}$) = - ١ (جا $\frac{\pi}{4}$ + جتا $\frac{\pi}{4}$) = - ١ ($\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$)

$= - \frac{2\sqrt{2}}{2} = - \sqrt{2}$ / سالبة ، عظمى

العظمى ق ($\frac{\pi}{4}$) = جا $\frac{\pi}{4}$ + جتا $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ عظمى محلية

قً ($\frac{5\pi}{4}$) = - ١ (جا $\frac{5\pi}{4}$ + جتا $\frac{5\pi}{4}$)

لكن جا $\frac{5\pi}{4}$ = جا ($\pi + \frac{\pi}{4}$) في الربع الثالث (الجيب سالب)

= - جا $\frac{\pi}{4}$ = $- \frac{\sqrt{2}}{2}$

وكذلك جتا $\frac{5\pi}{4}$ = جتا ($\pi + \frac{\pi}{4}$) في الربع الثالث (جيب التمام، الب)

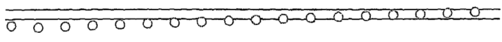
= - جتا $\frac{\pi}{4}$ = $- \frac{\sqrt{2}}{2}$

∴ قً ($\frac{5\pi}{4}$) = - ١ ($- \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$) = $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ /

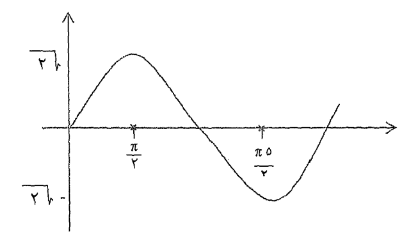
موجبة/صغرى

الصغرى المحلية: ق ($\frac{5\pi}{4}$) = جا $\frac{5\pi}{4}$ + جتا $\frac{5\pi}{4}$

$= - \frac{\sqrt{2}}{2} + (- \frac{\sqrt{2}}{2}) = - \sqrt{2}$



تمثيل تقريبي للاقتران ق (س) = جاس + جتاس ، ٠ < س < ٢π



مثال١٤ : إذا كان ق (س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٥

حدد نقط الانعطاف وأوجد قياس زوايا الانعطاف إن وجدت

الحل:

لتحديد نقط الانعطاف قً (س$_{١}$) = صفر

قَ (س) = ٣س^{٢} − ٦س

قً (س) ٦س − ٦

٦س − ٦ = صفر

٦س = ٦

س = ١ يمكن أن تكون نقطة انعطاف شرط أن تغير قً (س) من إشارتها حولها.

مقعر لأسفل   مقعر لأعلى

- - - - -   + + + + +

-∞   (١)   ١   (٢)   ∞

إشارة قً (س)

قً (٠) = ٦ (٠) − ٦ = - ٦ سالبة

ق″ (٢) = ٦ (٢) – ٦ = ٦ موجبة

∴ (١، ق (١)) نقطة انعطاف

أي ق (١) = (١)^{٣} – ٣ (١)^{٢} + ٥ = ٣

∴ (١، ٣) نقطة انعطاف

ظا زاوية الانعطاف = ق′ (١) = ٣ (١)^{٢} – ٦ (١) = - ٣

∴ زاوية الانعطاف ي هي ظا$^{-١}$ - ٣

ي السالبة = - ٧٢° أما الموجبة فهي كما يلي:

|ي| + |- ٧٢| = ٣٦٠

∴ ي = ٣٦٠ – ٧٢ = ٢٨٨° في الربع الرابع

(كون ظا ٢٨٨° = ظا (٣٦٠ – ٢٨٨) = - ظا ٧٢° = - ٣ تقريباً

∴ قياس زاوية الانعطاف = ٢٨٨°

⇦مثال١٥: يتحرك جسيم حسب العلاقة ف = ن^{٤} - ١٢ ن^{٣} + ٨ ن + ٥

حيث ف المسافة بالأمتار

ن الزمن بالثواني

احسب أقل تسارع له

الحل:

بما أن التسارع: ت = ف″ المشتقة الثانية

وبما أن التسارع قيمة صغرى فإن مشتقة ف″ = صفر

أي أن فً = صفر أو المشتقة الثالثة = صفر

∴ فَ = ٤ ن^{٣} - ٣٦ ن^{٢} + ٨

ت = فً = ١٢ ن^{٢} – ٧٢ ن هذا هو التسارع

فً = ٢٤ ن - ٧٢ = صفر

٢٤ ن = ٧٢

ن = $\frac{٧٢}{٢٤}$ = ٣ ثواني

∴ أقل تسارع ت (٣)

= ١٢ (٣)^{٢} – ٧٢ (٣) = (١٢) (٩) – ٧٢ (٣)

= ١٠٨ – ٢١٦ = - ١٠٨ م/ ث^{٢}

أقل تسارع

مثال١٦ : يبيع مصنع ثلاجات س ثلاجة في الأسبوع بسعر م دينار لكل ثلاجة ، إذا كانت العلاقة بين عدد الثلاجات س والسعر م هي م = ٤٠٠ – ٨ س

وكانت التكاليف الكلية في الأسبوع هي $\frac{١}{٤}$ س^{٢} + ٣٧س + ٦٠٠ دينار

ما هو عدد الثلاجات التي يتوجب إنتاجها أسبوعياً ليكون ربح المصنع أكبر ما يمكن ؟

الحل:

بما أن الربح (المكسب) = الإيراد – التكاليف

∴ ر = عدد الثلاجات × سعر بيع الثلاجة – التكاليف الكلية

ر = (س + م) – ($\frac{١}{٤}$ س^{٢} + ٣٧س + ٦٠٠)

ر = س (٤٠٠ – ٨ س) - $\frac{١}{٤}$ س^{٢} – ٣٧ س – ٦٠٠

ر = ٤٠٠ س – ٨ س^{٢} - $\frac{١}{٤}$ س^{٢} – ٣٧ س – ٦٠٠

اكبر ربح (قيمة قصوى عظمى)

∴ رَ = صفر

رَ = ٤٠٠ – ١٦ س - $\frac{١}{٤}$ (٢س) – ٣٧ = صفر

– ١٦ س - $\frac{١}{٢}$ س = - ٤٠٠ + ٣٧

- $\frac{١}{٢}$ ١٦ س = - ٣٦٣

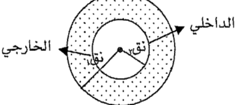
س = $\frac{٣٦٣}{١٦,٥}$ = ٢٢ ثلاجة

⇦مثال١٧: كرة مجوفة من الحديد يتغير قطريها الداخلي والخارجي عند التسخين بحيث يبقى حجم الحديد المصنوعة منه ثابت.

إذا كان معدل التغير في نصف قطرها الداخلي $\frac{٣}{٥}$ سم/ الدقيقة

أوجد معدل التغير في نصف قطرها الخارجي عندما يكون نصف قطرها الداخلي ٥سم والخارجي ٧سم.

الحل:



مقطع في الكرة

بما أن حجم الحديد المصنوع منه الكرة

= حجم الكرة من الخارج – حجمها من الداخل وهذا ثابت وتفرضه ح

ح ثابت = $\frac{٤}{٣}$ π نق$_{١}^{٣}$ - $\frac{٤}{٣}$ π نق$_{٢}^{٣}$

= $\frac{٤}{٣}\pi$ (نق$_{١}^{٣}$ − نق$_{٢}^{٣}$) والاشتقاق بالنسة للزمن

∴ $\frac{\text{د ح}}{\text{د ؟}} = \frac{٤}{٣}\pi \left\{ ٣\,\text{نق}_{١}^{٢} \cdot \frac{\text{د نق}_{١}}{\text{د ؟}} - ٣\,\text{نق}_{٢}^{٢} \cdot \frac{\text{د نق}_{٢}}{\text{د ؟}} \right\}$

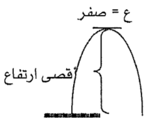
∴ $٣\,\text{نق}_{١}^{٢} \cdot \frac{\text{د نق}_{١}}{\text{د ؟}} - ٣\,\text{نق}_{٢}^{٢} \cdot \frac{\text{د نق}_{٢}}{\text{د ؟}} =$ صفر

∴ $\text{نق}_{١}^{٢} \times \frac{\text{د نق}_{١}}{\text{د ؟}} = \text{نق}_{٢}^{٢} \times \frac{\text{د نق}_{٢}}{\text{د ؟}}$

∴ $(٧)^{٢} \cdot \frac{\text{د نق}_{١}}{\text{د ؟}} = (٢٥) \left(\frac{٣}{٥}\right)$

$\frac{\text{د نق}_{١}}{\text{د ؟}} = \frac{(٣)\,(٥)}{٤٩} = \frac{١٥}{٤٩}$ سم/ الدقيقة

⇦مثال١٨: قُذف جسم رأسياً للأعلى فإذا كانت المسافة المقطوعة بعد ؟ ثانية هي ف = ١٢٠؟ − ٥ ؟^{٢}



أوجد أقصى ارتفاع يصله

الحل:

يصل الجسيم أقصى ارتفاع عندما تصبح سرعته ع = صفر

لكن ع = فَ = ١٢٠ − ١٠؟

١٢٠ − ١٠ ؟ = صفر

؟ = $\frac{١٢٠}{١٠}$ = ١٢ ثانية

ومنه ف = ١٢٠ ؟ − ٥ ؟^{٢}

= (١٢٠) (١٢) − ٥ (١٢)^{٢}

= ١٤٤٠ − ٥ (١٤٤)

= ١٤٤٠ − ٧٢٠ = ٧٢٠ متراً أقصى ارتفاع

⇦مثال١٩: إذا كان ق (س) = ٥ – س^٢، أوجد متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى ٣

الحل:

$$\frac{\text{جـ ص}}{\text{جـ س}} = \frac{\text{ق (س}_٢\text{)} - \text{ق (س}_١\text{)}}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{ق (٣)} - \text{ق (١)}}{٣ - ١}$$

$$= \frac{\{٥ - (٣)^٢\} - \{٥ - (٣)^٢\}}{٣ - ١}$$

$$= \frac{(٥ - ٩) - (٥ - ١)}{٣ - ١}$$

$$= \frac{-٤ - ٤}{٢} = \frac{-٨}{٢} = -٤$$

⇦مثال٢٠: إذا كان للاقتران ق (س) = أس^٣ + ب س^٢ + جـ س + ٥ نقطة انعطاف أفقي عند النقطة (١، ١) أوجد قاعدته

الحل:

الانعطاف الأفقي يُعني ثلاثة أبعاد رياضية متكاملة هي:

(١) الاقتران ق (١) يمر بالنقطة (١، ١) أي أن ق (١) = ١ (١)

(٢) قَ (١) = صفر كون الانعطاف أفقي أي أن ميل المماس = صفر المرسوم منها (٢)

(٣) قً (١) = صفر كون الانعطاف يجعل قً (س) = صفر عندها (٣)

ومنها ق(١) = أ (١)^٣ + ٧ (١)^٢ + جـ (١) + ٥ = ١

∴ أ + ب + جـ = – ٤ (١)

قَ(س) = أ س^٣ + ٢ ب س + جـ

ومنها قَ(س) = ٣ أ + ٢ ب + جـ = صفر (٢)

قً (س) = ٦ أ س + ٢ ب

ومنها قً (٠) = ٦ أ + ٢ ب = صفر   (٣)

وبحل المعادلات الثلاث بالحذف

ينتج أن

أ = - ٤

ب = ١٢

جـ = - ١٢

∴ ق (س) = - ٤س^{٣} + ١٢س^{٢} - ١٢س + ٥

⇦مثال٢١: إذا كان ق (س) = س^{٣} ، هـ (س) = س^{٤} أوجد (ق ∘ هـ)ً (٢)

أي ان قَ (س) = ٣ س^{٢} ، هـَ (س) = ٤ س^{٣}

قً (س) = ٦ س ، هـً (س) = ١٢ س^{٢}

الحل:

(ق ∘ هـ)ً (٢) = [(ق ∘ هـ)َ (٢)]َ = [(قَ (هـ (٢)) × هـَ (٢)]َ

واعتماداً على مشتقة حاصل ضرب اقترانين

= قَ (هـ (٢)) × هـً (٢) + هـَ (٢) × قً (هـ (٢)) × هـَ (٢)

= قَ (١٦) × هـً (٢) + هـَ (٢) × قً (١٦) × هـَ (٢)

= ٣ (١٦)^{٢} × ١٢ (٢)^{٢} + ٤ (٢)^{٣} × (٦ × ١٦) × ٤ (٢)^{٣}

= (٣ × ٢٥٦) × (١٢ × ٤) + ٣٢ × ٩٦ × ٣٢

$= ٧٦٨ + ٤٨ + ٣٢ \times ٩٦ \times ٣٢$

$= ٣٦٨٦٤ + ٩٨٣٠٤ = ١٣٥١٦٨$

وهناك طريقة أخرى وهي أن نركب الاقتران

(ق ∘ هـ) (س) ثم مجد مشتقته الثانية هكذا

(ق ∘ هـ) (س) = ق (هـ (س)) = ق $(س^{٤})$

$= (س^{٤})^{٣} = س^{١٢}$

(ق ∘ هـ)$'$ (س) = ١٢ $س^{١١}$

(ق ∘ هـ)$''$ (س) = ١٢ × ١١ $س^{١٠}$ = ١٣٢ $س^{١٠}$

∴ (ق ∘ هـ)$''$ (٢) = ١٣٢ × $٢^{١٠}$ = ١٣٢ × ١٠٢٤

= ١٣٥١٦٨

«نفس الجواب»

(٢١ — ٦) أسئلة وتدريبات وقوانين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات

(١) اوجد القيم القصوى المحلية للاقتران ق (س) = $\frac{١}{س^{٢} - ٣ س + ٣}$ وميزها إلى عظمى أو صغرى

(٢) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما

«١» ص = $\sqrt{س} - \frac{١}{\sqrt{س}}$

«٢» ص = (س — ١) ($\frac{١}{س}$ - ١)

«٣» ص = $\frac{(س - ١) (س + ١)}{س^{٢}}$

(٣) أوجد القيم القصوى المحلية ونوعها للاقترانات التالية:

«١» ق (س) = $س^{٣}$ — ٦ س + ٨

«٢» ق (س) = $س^{٣}$ + ٤ $س^{٢}$ — ٣س + ١

«٣» ق (س) = س - $\frac{٤}{س^{٢}}$

(٤) أوجد قَ (س) ، قً (س) لكل من الاقترانات

«١» ق (س) = ٣$س^{٢}$ — ٧ س + ٦

«٢» ق (س) = (س — ١) (س + ٢)

«٣» ق (س) = (س — ١) (س + ٢) (س — ٣)

(٥) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف = ٥ + ٤ ن − ٤ ن^{٢} + ن^{٣}

حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني

احسب تسارعه عندما تنعدم سرعته.

(٦) أوجد النقط الحرجة للاقتران

ق (س) = ٢ س^{٣} − ٩ س^{٢} + ١٢ س − ١

{عندما س = ١، ٢}

(٧) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف = ن^{٢} − ٢ ن + ٥

حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني

احسب أقل سرعة له

{٢ م/ ث}

(٨) أكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة أ (١، − ١) والذي يعامد المستقيم الذي معادلته ٢س + ٥ص = ٣

{٥س − ٢ص = ٧}

(٩) إذا كانت ص = س^{س} أوجد $\frac{د ص}{د س}$

إرشاد: خذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ.

(١٠) أكتب معادلة المماس للمنحنى ق (س) = ٤ س٢ + $\frac{١}{٢}$ عند النقطة ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$)

{ص = ٤ س − $\frac{١}{٢}$ }

(١١) أكتب معادلة المماس للمنحنى ق (س) = $\sqrt{\text{س}}$ عند النقطة (١٦، ٤)

{ص = $\frac{1}{8}$ س + ٢}

(١٢) أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\Big|_{(1، 2)}$ للعلاقة س^{2}ص + س ص^2 = ٦

{ - $\frac{8}{5}$ }

(١٣) أوجد قَ (س) للاقتران ق (س) = $\frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س (٢س} - 1)}$

(١٤) أوجد قَ (س) للاقتران ق (س) = ٢ س جتا س + (س^2 − ٢) جا س

{س^2 جتا س}

(١٥) أكتب معادلة المماس للعلاقة

جا (س + ص) = ٢س عند النقطة (٠ ، π)

{ص = - ٣ س + π}

(١٦) إذا كان س^2 + ص^2 = ١ أوجد $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2}$

{ $\frac{-1}{\text{ص}^3}$ }

(١٧) بين أن العمودي على المماس للعلاقة س^3 + ص^3 = ٣ س ص عند النقطة ($\frac{3}{2}$ ، $\frac{3}{2}$) يمر بنقطة الأصل

إرشاد: نجد معادلة العمودي ونعوض له نقطة الأصل.

(١٨) إذا كان قا ص − ظا س = صفر

أوجد $\frac{د ص}{د س}$

$\{ \frac{قا^٢ س}{قا ص ظا ص} \}$

(١٩) إذا كان $س^٣ = ص^٣ + س^٢$ جا ص + ١ أوجد $\frac{د ص}{د س} \Big|_{(٢ ، ١)}$

$\{٣\}$

(٢٠) أوجد معادلة المماس للعلاقة $س^٢ + ص^٢ = ١$ عند النقطة $(- \frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢})$

$\{ص = \frac{\sqrt{٣}}{٣} س + \frac{٢}{٣} \sqrt{٣} \}$

(٢١) ليكن ق (س) = $\frac{١}{٤} س^٢ + ١$ فما قيمة قَ (- ١)، قَ (٣)

$\{ - \frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢} \}$

(٢٢) إذا كلن ق (س) = س + جا س أوجد قَ $(\frac{\pi}{٤})$

$\{ ١ + \frac{\sqrt{٢}}{٢} \}$

(٢٣) إذا كان ص = جا س + جتا س أوجد $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$

$\{- ص\}$

(٢٤) إذا كان ص = ٣ $س^٨ - \sqrt{٢} س^٥ + \frac{٣}{٢} س^٣ + ٢٠$ س + ١ أوجد $\frac{د ص}{د س} \Big|_{س = - ١}$

(٢٥) إذا كان ق (س) = س جا س أوجد قَ (س)

(٢٦) إذا كان ق (س) = $س^٢$ جتا س أوجد قَ (س)

(٢٧) إذا كان ق (س) = س^{٢} جا س جتا س أوجد قَ (س)

(٢٨) إذا كان ص = جا ٣ س أوجد $\frac{د ص}{د س}$

(٢٩) إذا كان ص = $\sqrt{١ + س^{٤}}$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

(٣٠) أوجد قَ (س) إذا كان (١) ق (س) = جتا س^{٥}

(٢) ق (س) = جتا^{٥} س

(٣) ق (س) = (س – ٢ س^{٣})$^{-١١}$

(٣١) إذا كان ق (س) = جتا^{٢} ٤س أوجد قَ ($\frac{\pi}{٦}$)

{ $-\frac{٣}{٢}\sqrt{٣}$ }

(٣٢) إذا كان ص = ٣ $\sqrt{س}$ ، س > صفر أوجد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$

{ $-\frac{٣}{٤}$ س$^{\frac{-٣}{٢}}$ }

(٣٣) إذا كان ق (س) = جا س أوجد قً (س)

(٣٤) إذا كان س٢ – ٤ص٢ = ٩ أوجد $\frac{د ص}{د س}\Big|_{(٥ ، ٢)}$

{ $\frac{٥}{٨}$ }

(٣٥) أكتب معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق (س) = قا س عند س $\frac{\pi}{٤}$

{ص = $-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ س + $\frac{\sqrt{٢}}{٨}\pi$ + $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ }

(٣٦) أوجد قَ (س) لكلٍ من الاقترانات:

(١) ق (س) = ٢ س جتا س + ($س^٢$ − ٢) جا س {$س^٢$ جتا س}

(٢) ق (س) = لو ـهـ ظا ($\frac{١}{٢}$ س) { $\frac{١}{جا س}$ = قتا س}

(٣) ق (س) = لو ـهـ ظا ($\frac{١}{٢}$ س + $\frac{\pi}{٤}$) {- قا س}

(٣٧) إذا كان ص = $هـ^{لو هـ(١ + جا^٢ س)}$ أوجد $\frac{د ص}{د س} \Big|_{س = \frac{\pi}{٣}}$ { $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ }

إرشاد: بسط الاقتران ص بأخذ اللوغاريتم إلى الطرفين

فتصبح ص = ١ + $جا^٢$س

(٣٨) إذا كان ص = $هـ^{أس}$ فما قيمة أ التي تحقق المعادلة صً − ٥ صَ + ٦ ص = صفر

{٢ ، ٣}

(٣٩) إذا كان ق (س) = $\begin{cases} س^٢ & ، س < ٢ \\ ٤ س - ٤ & ، س \leq ٢ \end{cases}$ أوجد قَ (٢) {٤}

إرشاد: ابحث في اتصاله اولاً

(٤٠) إذا كان ق (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ١}$ أوجد قَ (س) { $\frac{٤ س}{(س^٢ + ١)^٢}$ }

(٤١) أكتب معادلة المماس المرسوم للاقتران ق (س) = جا س − جتا س من النقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، ١)

{ص = س + ١ - $\frac{\pi}{٢}$ }

إرشاد: تحقق أن النقطة تقع على الاقتران، أي أنها نقطة تماس

(٤٢) إذا كان ق(س) = $\sqrt{س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}}$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

$$\left\{ \frac{١}{\left(\sqrt{س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}}\right)\left(س - \frac{١}{س^{٢}}\right)} \right\}$$

(٤٣) أوجد قَ (س) لكلٍ من الاقترانات التالية:

(١) ق (س) = (٣س − ٢) $\sqrt{(١ + س)^{٣}}$ $\left\{ \frac{١٥}{٢} س \sqrt{س + ١} \right\}$

(٢) ق (س) = ٢ س جتا س + (س^{٢} − ٢) جا س {س^{٢} جتا س}

(٣) ق (س) = (١ + س) (١ − س) (١ + ٣ س) (١ − ٣س) {٣٦س^{٣} - ٢س}

إرشاد: استخدم قانون التوزيع

(٤٤) إذا كان ق (س) = $\frac{س}{١ - س^{٢}}$ أوجد قَ (١) {غير موجودة}

(٤٥) إذا كان للاقتران ق (س) = أ س٢ + ٦ س نقطة حرجة عند س = ١ فما قيمة الثابت أ ؟ {- ٣}

(٤٦) إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س ثلاجة شهرياً تعطى بالعلاقة ك (س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٨٠ س + ٥٠٠ وكان الإيراد الكلي الشهري يعطى بالعلاقة د (س) = ٢٨٠٠ س

فما عدد الثلاجات التي ينتجها المصنع شهرياً ليحقق أكبر ربح

{٣٢ ثلاجة}

إرشاد: رَ (س) = صفر

(٤٧) أوجد قَ (س) للاقتران ق (س) = $\frac{١}{س}$ س $\neq$ صفر باستخدام التعريف

{ $-\frac{١}{س^{٢}}$ }

(٤٨) إذا كانت ص = $ع^{٣}$ + ع ، ع = $س^{٢}$ − ٥ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

{١٢ $س^{٢}$ + ١}

(٤٩) إذا كانت $ص^{٢}$ = $(س − ١)^{٢}$ أوجد $\frac{د ص}{د س} \Big|_{(٢ ، ١)}$ { $\frac{٣}{٢}$ }

(٥٠) إذا كان ق (س) = $قا^{٢}$ س − $ظا^{٢}$س أوجد قَ (س) {صفر}

إرشاد: استعن بالمتطابقة $قا^{٢}$س = $ظا^{٢}$س + ١

(٥١) إذا كان ص = ($س^{٣}$ − ٢) (٤ س + ١) أوجد $\frac{د ص}{د س} \Big|_{س = -١}$ {−٢١}

(٥٢) إذا مر منحنى الاقتران ق (س) بالنقطتين أ (٨، ٦)، ب (٢ ، ١٢) احسب متوسط التغير له {−١}

(٥٣) أوجد أصفار المشتقة الأولى للاقتران ق (س) = س٣ − ٢٧ س + ١١ {± ٣}

(٥٤) أوجد $\frac{د}{د س}$ ($س^{٣}$) ، $\frac{د}{د س}$ ($ص^{٣}$)، $\frac{د}{د س}$ ($\pi^{٣}$)، $\frac{د}{د ص}$ ($ص^{٣}$)، $\frac{د}{د \pi}$ ($\pi^{٣}$)

{٣$س^{٢}$، صفر، صفر، ٣$ص^{٢}$، ٣$\pi^{٢}$}

(٥٥) جد نقط الانعطاف وزاويته عند كل نقطة من نقطه لمنحنى الاقتران ق (س) = $س^{٤}$ − ٤ $س^{٣}$ {(٠ ، ٠)، (٢، − ١٦)، ∢ ي = صفر، ∢ ي = $ظا^{-١}$ −١٦}

(٥٦) إذا كان ق (س) = جا س + جتا س بيِّن أن [قَ (س)]^{2} + [ق (س)]^{2} = ٢

(٥٧) إذا كان س^{4} + س^{2}ص^{2} + ص^{4} = صفر أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

$\left\{ \frac{-\ 2\text{س}^{3} - \text{س ص}^{2}}{\text{س}^{2}\text{ص} + 2\text{ص}^{3}} \right\}$

(٥٨) إذا كان جا ٣ ص − جتا ٢ س = صفر أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

$\left\{ \frac{-\ 2\text{جا}2\text{س}}{3\ \text{جتا}\ 3\text{ص}} \right\}$

(٥٩) أوجد النقط الواقعة على الدائرة س^{2} + ص^{2} − ٦س + ٨ ص = صفر والتي يكون عندها المماس موازياً لمحور الصادات.

{(− ٢ ، − ٤)، (٨ ، − ٤)}

إرشاد: م المماس الموازي لمحور الصادات = $\frac{1}{\text{صفر}}$

(٦٠) أوجد معادلات المماس والعمودي عليه للمنحنى س^{2} + ص^{2} − ٦س − ١٦ = صفر عند النقطة التي إحداثها السيني = ٤ والواقعة عليه.

{٤س − ٣ص = ١٦ ، ٤س + ٣ص = ٢٤

٣س + ٤ص = ١٢ ، ٣س − ٤ص = − ١٢}

(٦١) إذا كانت ط^{2} = ص ، ط = س^{3} − س^{2} − ٥ أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

{٢ (س^{3} − س^{2} − ٥) (٣س^{2} − ٢س)}

إرشاد: استعن بقاعدة السلسلة

(٦٢) إذا كان ق (س) = (| س |)^{2}

أوجد قَ (٠)، قً (٠)، قً (٠) {٠، ٠، غير موجودة}

إرشاد: أعد تعريف الاقتران ق (س) ليكون (| س |)^{٣} = { $-$ س^{٣} ، س < صفر ؛ س^{٣} ، س ≥ صفر }

(٦٣) إذا كان ق (١) = ٢ ، قَ (١) = ٣ ، هـ (١) = $-$ ٢ ، هـَ (١) = ١

أوجد ($\frac{ق}{هـ}$)َ (١) {$-$ ٢}

(٦٤) إذا كان $\frac{س}{ص}$ + $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٥}{٢}$ أوجد $\frac{د ص}{د س}\Big|_{(١ ، ٢)}$ {٢}

(٦٥) إذا كان ص = $\sqrt{١ + \sqrt{س}}$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ { $\frac{١}{٤\sqrt{س}\sqrt{١ + \sqrt{س}}}$ }

(٦٦) إذا كان ص = ق (س^{٢} + ٢س $-$ ١) أوجد $\frac{د ص}{د س}\Big|_{س = ١}$ علماً بأن قَ (٢) = ٥

{٢٠}

إرشاد: استعن بمشتقة الاقتران المركب

(٦٧) إذا كان للاقتران ق (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + ٩س + ١ قيمة عظمى محلية عند س = ١ وقيمة صغرى محلية عند س = ٣ أوجد قيمة كل من أ، ب

{١، $-$ ٦}

إرشاد: قَ (س$_{١}$) = صفر عند العظمى والصغرى معاً

(٦٨) تتمدد كرة معدنية بالحرارة فيزداد حجمها بمقدار ٢,٥ سم^{٣}/ ث احسب كم تزداد مساحة سطحها عندما يصبح نصف قطرها ١٠ سم

{ $\frac{١}{٢}$ سم^{٢}/ ث}

(٦٩) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكلٍ من:

(١) ص = س جا س

(٢) ص = س هـ^{س}

(٣) ص = س لو$_{هـ}$ س

(٤) ص = س جتا س

(٥) ص = س ظا س

{استعن بشتقة حاصل ضرب اقترانين}

(٧٠) إذا كان ق (س) = أ س^{٢} وكانت نها$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١}$ = ٦ ما قيمة أ ؟

{٣}

(٧١) إذا كان جا ص = جا س أوجد $\frac{د ص}{د س} \Big|_{(\frac{\pi}{٣} ، \frac{٢\pi}{٣})}$ {- ١}

(٧٢) ما قيمة أ التي تجعل المستقيم ٤س – ص – أ = صفر مماساً للمنحنى ص = ٢س^{٢} – س + ١ {$\frac{١٧}{٨}$}

(٧٣) إذا كان س = ظتا ص أوجد $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} \Big|_{ص = \frac{\pi}{٢}}$ {$\frac{١}{٢}$}

إرشاد: استعن بالاشتقاق الضمني

(٧٤) بدأ جسيم حركته من السكون في خط مستقيم بحيث أنه يقطع المسافة ف بعد ن من الثواني بالقانون التالي ف (ن) = ٨ ن^{٢} – ن^{٣} أوجد المسافة التي يقطعها عندما يكون تسارعه = ٤ سم/ ث^{٢}.

(٧٥) إذا كان ق (س) = { $\frac{\text{جا س}^{2}}{\text{س}}$ ، س ≠ صفر
صفر ، س = صفر

ابحث في اتصاله عند س = صفر {متصل}

إرشاد: اضرب البسط والمقام بـ س

(٧٦) بدأت سفينة حركتها شرقاً بسرعة ٢٠ ميل/ الساعة وبعد ساعة انطلقت سفينة أخرى من نفس المكان جنوباً بسرعة ٣٠ ميل/ الساعة.

أوجد سرعة تباعدهما عن بعضهما البعض بعد ساعتين من انطلاق السفينة الثانية.

(٧٧) احسب مساحة المثلث المحدود بمحور السينات والمماس والعمودي عليه عند نقطة التماس (- ١ ، ٨) للمنحنى ص = ٩ – س^{2} {٨٠ وحدة مساحة}

إرشاد: استعمل ظا ي = م المماس

(٧٨) إذا كان ق (س) = $\frac{\text{جتا}^{2}\text{س}}{1 + \text{جا}^{2}\text{س}}$ بيِّن أن:

ق ($\frac{\pi}{4}$) – ٣ قَ ($\frac{\pi}{4}$) = ٣

(٧٩) إذا كان ق (س) = ٣ س^{4} – ١٠س^{3} – ١٢ س^{2} + ١٢س - ٧

أوجد النقط الحرجة والقيم القصوى ونقط الانعطاف إن وجدت للاقتران.

(٨٠) إذا كانت ص = $5^{\text{س}}$ أوجد {$5^{\text{س}}$ $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ٥}

إرشاد: خذ لوغاريتم الطرفين ثم اشتق

(٨١) ما أقل قيمة للمتغير ص إذا كان ص = ٣س^{٢} − ٢س + ١ ، س ∋ ح $\{ \frac{٢}{٣} \}$

إرشاد: قيمة صغرى

(٨٢) أوجد قَ (س) للاقتران:

ق (س) = (س − ١) ($\frac{١}{س}$ − ١) ، س ≠ صفر $\{ \frac{١}{س^{٢}} - ١ \}$

(٨٣) أوجد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق (س) = س^{٣} − ٣س + ١

$\{ (-\infty ، -١] ، [١ ، \infty) ، [-١ ، ١] \}$

(٨٤) إذا كانت ص = ٥ − ٣ س ما قيمة Δ ص (التغير في ص) عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ {- ٩}

(٨٥) إذا كان ق (س) = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} أوجد قَ (س) بالتعريف {٦س٢ - ٦س}

(٨٦) إذا كان ق (س) = ٥س^{٣} − ٢س^{٢} + ٧ ما قيمة قً (١) {٢٦}

(٨٧) إذا كانت ص = $\frac{١}{ع}$ ، ع ≠ صفر ، ع = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ صفر أوجد $\frac{د ص}{د س}$ {١}

(٨٨) ما قيمة س التي تجعل قً (س) (للاقتران ق (س) = $\frac{١}{٣}$ س٣ + $\frac{١}{٢}$ س٢ − ٢س + ١) تساوي صفراً $\{ - \frac{١}{٢} \}$

(٨٩) إذا كان ق (س) قابل للاشتقاق وكان ق (س^{٣} + ١) = س أوجد قَ (٩)

$\{ \frac{١}{١٢} \}$

إرشاد: اشتقاق اقتران مركب

(٩٠) يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $ف(ن) = ٦ن^{٢} - ن^{٣}$ حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني.

احسب المسافة التي يقطعها الجسيم حتى يصبح تسارعه صفراً. {١٦ متر}

(٩١) إذا كان ص = ظا ن ، وكان $\frac{دن}{دس} = ١٢$ أوجد $\frac{دص}{دس}\Big|_{ن=\frac{\pi}{٦}}$ {١٦}

(٩٢) يُراد صنع صندوق مفتوح من أعلى من صفيحة مستطيلة من معدن ما ، طولها ٤٨سم وعرضها ٣٠ سم وذلك بقص مربعات متساوية المساحة من زواياها الأربع وثني الأجزاء البارزة للأعلى،

جد أكبر حجم للصندوق {٣٨٨٨سم^{٣}}

إرشاد : استعن بالشكل المرفق

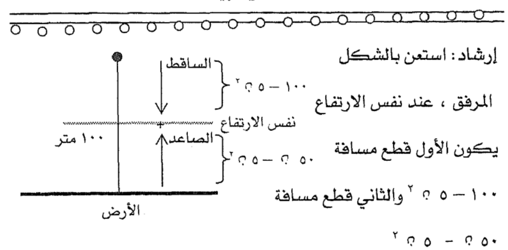


(٩٣) بين أن المماسين المرسومين لمنحنى العلاقتين $٤س^{٢} + ص^{٢} = ٤٥$ ، $س^{٢} - ٤ص^{٢} = ٥$ يكونان متعامدان عند نقطة تقاطع المنحنيين في الربع الأول.

إرشاد : حل المعادلتين معاً لتجد نقطة التقاطع

(٩٤) أسقط جسم من ارتفاع ١٠٠ متر عن سطح الأرض حيث المسافة المقطوعة بالأمتار بعد ن ثانية هي $ف_{١}(ن) = ٥ن^{٢}$ وفي نفس الوقت بالذات أطلق جسم آخر من سطح الأرض للأعلى حيث المسافة التي يقطعها هي $ف_{٢}(ن) = ٥٠ن - ٥ن^{٢}$

أوجد سرعة كلٍ من الجسمين عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الأرض {٢٠ ، ٣٠ م/ ث}



إرشاد: استعن بالشكل المرفق ، عند نفس الارتفاع يكون الأول قطع مسافة ١٠٠ − ٥ ن^{٢} والثاني قطع مسافة ٥٠ ن − ٥ ن^{٢}

(٩٥) إذا كان ق (س) = ١٢ س − س^{٣} ، أوجد فترات التقعر لأسفل ولأعلى لمنحناه.

{لأسفل [٠ ، ∞)، لأعلى (− ∞، ٠] }

(٩٦) إذا كان ق (س) = ٢س^{٢} + ١ ، هـ (س) = ٣ س أوجد (ق ∘ هـ)´ (س)

{٣٦ س}

إرشاد: يمكن تركيب الاقترانين ثم الاشتقاق

(٩٧) إذا كان ق (س) = س | جا س | ، س ∈ [٠ ، ٢ π]

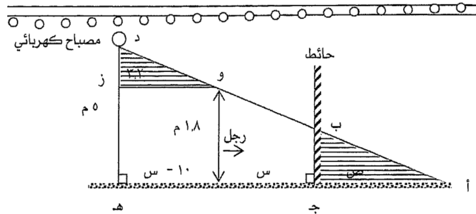
هل الاقتران ق (س) قابل للاشتقاق عند س = π أم لا {لا}

إرشاد: أعد تعريف الاقتران

(٩٨) إذا كان ق (س) = س (٢ − س)^{٣} ، س ∈ [− ١ ، ٤]

أوجد القيم القصوى المحلية وميزها إلى صغرى وعظمى.

(٩٩) يقع مصباح كهربائي على بعد ١٠ امتار من حائط رأسي وعلى ارتفاع ٥ متر عن سطح ممر أفقي يعامد الحائط الرأسي.



سار رجل طوله ١,٨ متر على هذا الممر بسرعة $\frac{١}{٢}$ م/ ث مبتعداً عن المصباح (كما في الشكل) جد سرعة تحرك ظل رأس الرجل على الحائط عندما يكون الرجل على بعد ١,٥ متر عن الحائط.

إرشاد : استعن بالشكل ثم استفد من تشابه المثلثين المظللين

(١٠٠) إذا كانت ص = $\frac{(س^٢ + س + ١)^٤}{(س^٢ + ١)^٣}$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

{ $\frac{(س^٢ + س + ١)^٣ (٢س^٣ - ٢س^٢ + ٢س + ٤)}{(س^٢ + ١)^٤}$ ، إرشاد خذ لوغاريتم الطرفين}

(١٠١) قذف جسيم رأسياً للأعلى وقطع مسافة ف متراً بزمن قدره ن ثانية حسب العلاقة ف (ن) = - ٤٩٠ ن ^{٢} + ٨٠ ن + ٢٠٠ متى يصل الجسم أقصى ارتفاع له. { $\frac{٤}{٤٩}$ ثانية}

إرشاد : السرعة = صفر

(١٠٢) إذا كان ق (س) = ٢س - ١ أوجد [ق$^{-١}$ (س)]َ { $\frac{١}{٢}$ }

(١٠٣) الشكل المجاور يمثل منحنى قَ (س) في الفترة [- ٢ ، ٤] اعتماداً عليه أجب عما يلي:

(١) ما الإحداثي السيني للنقط الحرجة لمنحنى ق (س) {- ١ ، ٣}

(٢) ما الإحداثي السيني لنقط الانعطاف للاقتران ق (س) {١}

(٣) أكتب اقتران التناقص للاقتران ق (س) {(-١ ، ٣)}

ق = قَ (س)

(-١ ، ٠) (٣ ، ٠) (١ ، -١)

(١٠٤) بيِّن أن الاقتران $ق (س) = \begin{cases} ٣س + ٢ & ، س \le ٠ \\ \frac{٢}{س + ١} & ، س > ٠ \end{cases}$

متصل عند س = صفر لكنه غير قابل للاشتقاق عند س = صفر بالذات.

(١٠٥) إذا كان ص = $(هـ (س))^٢$ وكان هـ (١) = -٢ ، هـَ (١) = ٢

أوجد $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ١}$ {-٢٤}

(١٠٦) إذا كان ق (س) = $س^٢ \,|س - ٣|$ أوجد قَ (١) {٣}

(١٠٧) أوجد مجالات تزايد وتناقص الاقتران:

$ق (س) = \begin{cases} ٣س^٢ + ١ & ، س \ge ٣ \\ ٤ - س^٢ & ، س < ٣ \end{cases}$

{[٣ ، ∞) متزايد ، (-∞ ، ٣] متناقص}

(١٠٨) أكتب قاعدة الاقتران كثير الحدود من الدرجة الثالثة الذي؛

له قيمة عظمى محلية = ٢ عندما س = -١

وله قيمة صغرى محلية = -١ عندما س = ١

{$\frac{٣}{٤} س^٣ - \frac{٩}{٤} س - \frac{١}{٢}$} ، إرشاد: الاقتران يمر بالنقطة (-١ ، ٢) ، (١ ، -١)

(١٠٩) ما أكبر قيمة للاقتران (عظمى مطلقة) ق (س) = س − $س^2$ في الفترة [٢ ، ٤]؟

{− ٢}

وما أصغر قيمة للاقتران (صغرى مطلقة) هـ (س) = $\frac{س^2}{س^2 + ١}$ ؟ {صفر}

(١١٠) أوجد النقط الحرجة لكل من الاقترانات التالية إن وجدت:

(١) $ق_1$ (س) = $\frac{١}{٣}$ $س^3$ − $\frac{١}{٢}$ $س^2$ − ٢س + ٥ {عندما س = ٢ ، − ١}

(٢) $ق_2$ (س) = $\sqrt{س^2 - ٩}$ ، س ≥ ٣ {عندما س = ٣}

(٣) $ق_3$ (س) = أ حيث أ ثابت {لكل س ∋ ح}

(٤) $ق_4$ (س) = [س + ٢] {لكل س ∋ ح}

(٥) $ق_5$ (س) = { ١ − $س^2$ ، − ١ ≤ س < ١ ؛ $س^2$ − ١ ، ١ ≤ س ≤ ٥ } {− ١ ، ٠ ، ١ ، ٥}

(١١١) إذا كانت (٢ ، − ١) نقطة حرجة للاقتران ق (س) = $\frac{أ س + ب}{(س − ١)(س − ٤)}$

أوجد قيمة كل من أ ، ب {١ ، ٠}

إرشاد : الاقتران يمر بالنقطة (٢ ، − ١) أيضاً

(١١٢) عين نقط الانعطاف لكل اقتران من الاقترانات التالية إن وجدت:

(١) $ق_1$ (س) = ٨ $س^2$ − $س^4$ {($\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٨}{٩}$) ، ($\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٨}{٩}$)}

(٢) $ق_2$ (س) = $س^4$ − ٤ $س^3$ + ٦$س^2$ + ٥ {لا يوجد}

(٣) $ق_3$ (س) = $جا^2$س {($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{١}{٤}$) ، ($\frac{٣\pi}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$)}

(١١٣) ما مقياس زاوية الانعطاف للاقتران

ق (س) = س^{٣} − س^{٢} + ٧ س + ٥ لأقرب درجة {٧٩$^{\circ}$}

(١١٤) إذا كان هـ (٢) = ٥ ، هـَ (٢) = ٤

ق (٢) = ١ ، قَ (٢) = ٣

ق (٥) = ٨ ، قَ (٥) = ٧

أوجد (١) (ق ∘ هـ)َ (٢) ، (٢) (ق + هـ)َ (٢)

(٣) (ق − هـ)َ (٢) ، (٤) $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'$ (٢)

{٢٨، ٧، ١٩، − ١١}

(١١٥) أوجد مجالات تقعر كل من الاقترانات التالية وميزه لأعلى أو لأسفل.

(١) ق (س) = | س^{٢} − ٩ | على الفترة [− ٥ ، ٥] {لأعلى [− ٥ ، ٣] ، [٣ ، ٥]}

(٢) ق (س) = جاس على الفترة [٠ ، ٢π] {لأعلى [π ، ٢π] ، للأسفل [٠ ، π]}

(٣) ق (س) = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ {لأعلى [− ∞ ، ٠] ، للأسفل [٠ ، ∞]}

(١١٦) إذا كان ق (س) = لو$_{\text{هـ}}$ (س^{٢} + س)$^{\frac{١}{٣}}$ أوجد قَ (س) { $\frac{\text{٢ س + ١}}{\text{٣ (س}^{٢}\text{ + س)}}$ }

(١١٧) إذا كان ق (س) = ٢س^{٣} − ٩س^{٢} + ١٤س − ٦ أوجد مجالات تزايده وتناقصه

{متزايد على ح}

(١١٨) أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ لكل من:

(١) ص = (٢س + أ)^{٣} ، (٢) ص = جا (س^{٢} + ٤س)

(٣) ص = لو$_{هـ}$ (٢س)، س > ٠ ، (٤) ص = (هـ)$^{٢س + ١}$

(١١٩) إذا كان ق (س) = $\frac{هـ^{٢س}}{هـ^{س} + ١}$ أوجد قَ (س) { $\frac{هـ^{٣س} + ٢ هـ^{٢س}}{(هـ^{س} + ١)^{٢}}$ }

(١٢٠) إذا كان ص = جتا (س + أ) أوجد $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ {- ص}

(١٢١) إذا كان ق (س) = $\sqrt{١ + \sqrt{س}}$ أوجد قَ (٩) { $\frac{١}{٢٤}$ }

(١٢٢) إذا كان س ص (س + ص) = ٦ أوجد ميل المماس عند (١ ، ٢) { $\frac{-٨}{٥}$ }

(١٢٣) إذا كان جا ص = جا٢س أوجد $\frac{د ص}{د س}$ { $\frac{٢ جتا ٢س}{جتا ص}$ }

(١٢٤) إذا كان جاس = جتاس أوجد $\frac{د ص}{د س} \Big|_{(\pi ، \frac{\pi}{٢})}$ {١}

(١٢٥) أوجد أصغر قيمة للاقتران ق (س) = | س − ٣ | − ٥ {- ٥}

إرشاد: صغرى مطلقة

(١٢٦) أوجد النقط الحرجة للاقتران ق (س) = $\frac{٢ س - ١}{س + ٣}$ { $\frac{١}{٢}$ ، - ٣}

(١٢٧) أوجد القيم القصوى للاقتران ق (س) = $\begin{cases} - س^{٢} & ، س \leq ٢ \\ - ٤ & ، س > ٢ \end{cases}$ {عظمى - ٤}

(١٢٨) إذا علمت أن للاقتران ص = ق (س) نقطة انعطاف عند س = ٢ وأن ق (٢) = ٨ ، قَ (٢) = - ٣ ، قً (٢) = صفر أوجد ظل زاية الانعطاف {- ٣}

(١٢٩) ما مجال تقعر الاقتران ق (س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٢س للأسفل {(− ∞ ، ١)}

(١٣٠) ما مجال تناقص الاقتران ق (س) = س^{٢} ، س $\in$ [− ٤ ، ٤] {(− ٤ ، ٠)}

(١٣١) ما مجال تزايد الاقتران ق (س) = جتا س ، س $\in$ [٠ ، ٢π] {(π ، ٢π)}

(١٣٢) إذا كان للاقتران ق (س) = ل س − س^{٢} قيمة عظمى محلية عند س = ٣ ما قيمة ل {٦}

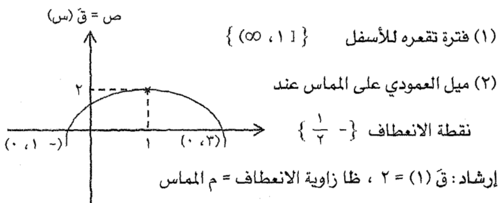
(١٣٣) إذا كان للاقتران ق (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ٥ نقطة انعطاف أفقي عند (١ ، ١) أوجد قاعدة الاقتران {ق (س) = − ٤س^{٣} + ١٢ س^{٢} − ١٢س + ٥}

إرشاد: قَ (١) = صفر ، قً (١) = صفر، ق (١) = ١ كون الاقتران يمر بها

(١٣٤) إذا كانت النقطة (٥ ، $\sqrt{٣}$) نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران ق (س) وكان قَ(٥) = ١ أوجد قياس زاوية الانعطاف بالدرجات للاقتران عندما س = ٥

{٤٥°}

(١٣٥) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى قَ (س) أوجد:



(١) فترة تقعره للأسفل {[١ ، ∞)}

(٢) ميل العمودي على المماس عند نقطة الانعطاف {− $\frac{١}{٢}$}

إرشاد: قَ (١) = ٢ ، ظا زاوية الانعطاف = م المماس

(١٣٦) اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق (س) أيٌّ من النقط

{م، ن، ك، و، ي} عندها تكون

قَ (س) سالبة، قً (س) سالبة

إرشاد: ق (س) متناقص ومقعر

لأسفل

(١٣٧) إذا كان ص = هـ ^قاس^ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ {قاس ظاس هـ ^قاس^}

(١٣٨) إذا كان ص = هـ ^س^ لو~هـ~ س أوجد $\frac{د ص}{د س}$ {هـ ^س^ . $\frac{1}{س}$ + هـ ^س^ . لو~هـ~ س}

(١٣٩) إذا كان ق(س) = لو~هـ~ (س^٢^ + ١) فما قيمة قَ (١) {١}

(١٤٠) إذا كان ص = ٢ ^٣س^ فما قيمة $\frac{د ص}{د س}\Big|_{س = \frac{1}{3}}$ {٦لو~هـ~ ٢}

(١٤١) ما العددان الحقيقيان الموجبان اللذان:

(١) مجموعهما ٥٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن {٢٥

(٢) مجموعهما ٤٠ ومجموع مربعيها أقل ما يمكن {٢٠، ٢٠}

(٣) مجموعهما ٣٠ وحاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن

{٢٠، ١٠}

(١٤٢) ما إحداثيات النقطة التي تقع على منحنى الاقتران ص = $\sqrt{س^2 + 6 س + 10}$

وأقرب ما تكون إلى النقطة (١، ٠) {(-١، $\sqrt{5}$)}

(١٤٣) مثلث أطوال أضلاعه كما في الشكل

ما قيمة س، التي تجعل مساحته أكبر

ما يمكن

أ
٦ سم
س سم
هـ
جـ
ب
٨ سم

{١٠ سم}

إرشاد: أوجد قيمة س أولاً ثم أوجد مساحة المثلث ثانياً

(١٤٤) إذا كان ق (س) = |س - ١| - |س| أوجد قَ (٠) {غير موجودة}

(١٤٥) إذا كان جا (س ص) = ص أوجد $\frac{د ص}{د س}\Big|_{(\frac{\pi}{٢} ، ٠)}$ {صفر}

(١٤٦) إذا كانت المقاومة الكلية لمقاومتين موصولتين على التوازي $م_١$ ، $م_٢$ تُعطى بالعلاقة $\frac{١}{م} = \frac{١}{م_١} + \frac{١}{م_٢}$ وكانت $م_١$ تزداد بمعدل ١ أوم/ ث و $م_٢$ تزداد بمعدل ١,٥ أوم/ ثانية، جد معدل الزيادة في المقاومة م علماً بأن $م_١ = ٥٠$ ، $م_٢ = ٧٥$ أوم

{٠,٦ أوم/ ث}

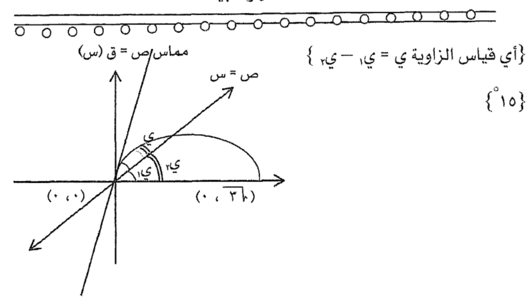
(١٤٧) إذا كان ق (س) = أس^٣ + ٣س^٢ وكانت $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = ٧$ فما قيمة أ

{٢}

(١٤٨) إذا كان ق (ص^٢) = س وكان قَ (١) = ٣ أوجد $\frac{د ص}{د س}\Big|_{ص = ١}$ {$\frac{١}{٦}$}

إرشاد: مشتقة الاقتران المركب

(١٤٩) من الشكل المجاور أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم ص = س ومماس منحنى الاقتران ق (س) = $\sqrt{٣}$ س − س^٢ عند (٠، ٠).



{أي قياس الزاوية ي = $ي_1 - ي_2$ }

{١٥°}

(١٥٠) قذفت كرة رأسياً للأعلى من قمة برج فإذا كانت المسافة المقطوعة تتعيم بالمعادلة ف (ن) = − ١٦ $ن^2$ + ٤٨ ن + ١٦٠ حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، احسب ارتفاع البرج وسرعة الكرة لحظة اصطدامها بالأرض

{١٦٠ متراً، − ١١٢ م/ ث}

إرشاد: لإيجاد ارتفاع البرج ن = صفر، ولإيجاد السرعة لحظة الاصطدام بالأرض ف = صفر

(١٥١) س ص، س ع طريقان متعامدان في س ، س ص = ٩٠٠ متر ، س ع = ٧٠٠ متر ، بدأ رجلان الحركة معاً في نفس الوقت وسارا باتجاه س، الأول من ص وبسرعة ٦٠ متر/ دقيقة والثاني من ع وبسرعة ٨٠ متر/ دقيقة.

أوجد معدل التغير في مساحة المثلث الناتج من حركتها مع النقطة س بعد ٨ دقائق من بداية الحركة {١٨٦٠٠$م^2$ / دقيقة}

إرشاد: يمكن أن يكون الحل بدلالة الزمن ن فقط

(١٥٢) إذا كان $هـ^{ص}$ = س حيث هـ العدد النايبيري أوجد $\frac{د ص}{د س}$ { $\frac{١}{س}$ }

(١٥٣) إذا كان ص هـ ^{أس} ، أ ∋ ح$^{+}$ ما قيمة أ ليكون ص'' − ص' − ٦ص = صفر

{٣}

(١٥٤) إذا كان ق (س) = لو$_{هـ}$ $\left(\frac{س^{٥}}{س^{٢} + ١}\right)$ أوجد قَ (١) { $\frac{٨}{٣}$ }

(١٥٥) أوجد ميل المماس إزاء كل نقطة للاقترانين

(١) ق (س) = ١ − [٢س]، س = ١,٢٥ {صفر}

(٢) ق (س) = (− ١)[س]، س = ٠,٥ {صفر}

(١٥٦) إذا كان ف = ن^{٢} − ٢٠ ن + ١٢٠ احسب المسافة ف عندما تنعدم السرعة ع

{٢٠ كم}

(١٥٧) أوجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س = ١٢

(١٥٨) احسب نها$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{ظا (\frac{\pi}{٤} + هـ) - ١}{هـ}$ {قَ (١)}

إرشاد: استبدل ١ بـ ظا $\frac{\pi}{٤}$ يصبح الاقتران النسبي تعريف المشتقة الأولى

(١٥٩) احسب نها$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{ق (٢ + ٧ هـ) - ق (٢ + ٣ هـ)}{٤ هـ}$

إرشاد: بإضافة ق (٢) للبسط ثم طرحها منه يصبح الاقتران النسبي تعريف المشتقة الأولى.

(١٦٠) إناء مخروط الشكل نصف قطر قاعدته ٥ سم وارتفاعه ١٢ سم ورأسه

للأسفل يخرج منه الماء بمعدل ٤ قدم^{٣}/ ث ويصب في وعاء آخر اسطواني الشكل نصف قطر قاعدته ٢ سم فإذا علمت أن ارتفاع الماء بالمخروط = ارتفاع الماء بالإسطوانة.

اوجد معدل تناقص الماء في المخروط

إرشاد: $\frac{د ح_١}{د ?} = \frac{د ح_٢}{د ?}$ حيث $ح_١$ حجم الماء بالمخروط، $ح_٢$ حجم الماء بالإسطوانة

(١٦١) نقطتان ماديتان تحركتا من نقطة الأصل، الأولى على المنحنى ص = س^{٢} والثانية باتجاه محور السينات السالب.

اوجد أقرب مسافة فيها عندما س = ٢

(١٦٢) أكتب معادلة المماس للمنحنى ٤س^{٢} + س^{٢} + ٤ المرسوم من النقطة الخارجة عنه (- ٢، ٠) $\{ص = \frac{٢}{\sqrt{٣}} س + \frac{٤}{\sqrt{٣}}\}$

إرشاد: نجد أولاً نقطة التماس (س، ص) من ميل المماس = ميل المنحنى وهنا $(-\frac{١}{٢}، \sqrt{٣})$

(١٦٣) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل من الاقترانات التالية:

ص = س $لو_{هـ}$ س ، ص = س . $هـ^{س}$ ، ص = $هـ^{س} لو_{هـ}$ س

(١٦٤) إذا كان ق (٢) = ٣ ، قَ (٢) = ٤ أوجد $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق (س) {٣}

(١٦٥) إذا كان منحنى ق (س) يمر بالنقطة (١، ٥) وكان متوسط تغيره من س = ١ إلى س = ٣ هو ٤ أوجد ق (٣) {٣}

(١٦٦) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٢\,\text{أ}\,\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} + ١$

وكانت $\displaystyle \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(-١ + ٢\,\text{هـ}) - \text{ق}(-١)}{٣\,\text{هـ}} = -٢$ ما قيمة أ $\{٢\}$

(١٦٧) إذا اكن $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ}\,\text{س}^{٢} + ٥\,\text{س} & \text{،}\ \text{س} \le ٢ \\ ٣\,\text{س}^{٣} + \text{ب} & \text{،}\ \text{س} > ٢ \end{cases}$ قابل للاشتقاق عند س = ٢

أوجد قيمة كلٍ من أ ، ب $\left\{\frac{٣١}{٤} \text{ ، } ١٧\right\}$

إرشاد : متصل والمشتقة موجودة عند س = ٢

(١٦٨) إذا كان ق (س) . هـ (س) = ١ وكان هـَ (٣) = ٤ ، هـ (٣) = − ٢

أوجد قَ (٣) $\{-١\}$

إرشاد : استعمل الفرض

(١٦٩) أوجد أصفار قَ (س) عندما $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$ $\{-١ ، ١\}$

(١٧٠) أوجد $\dfrac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\dfrac{\text{ق}(\text{س})}{\text{س}}\right)$ عندما س = ٥ ، ق (٥) = ١٠ ، قَ (٥) = ٢ $\{\text{صفر}\}$

(١٧١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{جـ}}{\text{هـ}(\text{س})}$ وكان قَ (٢) = ٦ ، هـَ (٢) = ٣ ، هـ (٢) = ١

أوجد قيمة جـ $\{-٢\}$

(١٧٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}^{٢} - ٤|$ أوجد قيم س التي تجعل ق (س) عندها غير قابل للاشتقاق. $\{-٢ ، ٢\}$

(١٧٣) إذا كان $\text{ص} = \sqrt{٢\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}$ أوجد قيم س حيث $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{صفر}$

$\{١\}$

(١٧٤) إذا كانت ع (السرعة) = ٦ $\sqrt{\text{ف}}$ (المسافة) احسب التسارع {١٨م/ ث^{٢}}

(١٧٥) إذا كانت ف = $\frac{١}{٣}$ ن^{٣} − ٣ ن^{٢} + ٥ ن + ٢

احسب السرعة عندما ينعدم التسارع {− ٤م/ ث}

(١٧٦) أوجد

(١) قَ ($\frac{١}{٤}$) عندما ق (س) = $\sqrt{\text{س}}$ [٢س + ١] {غير موجودة}

(٢) قَ (٢) عندما ق (س) = ٣ س − [س + $\frac{١}{٢}$] {٣}

(٣) قَ (٦٤) عندما ق (س) = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ + $\sqrt[٢]{\text{س}}$ { $\frac{١}{١٢}$ }

(٤) قَ ($\frac{١}{٤}$) عندما ق (س) = [٢س + $\frac{١}{٢}$] س^{٢} + ٤ {غير موجودة}

(٥) قَ (٤) عندما ق (س) = $\frac{|\text{س} - ٤|}{\text{س} - ٤}$ {غير موجودة}

إرشاد: ق (س) غير متصل

(١٧٧) ما مجموعة قيم س التي تكون المشتقة الأولى عندها غير موجودة في كل من الاقترانين

(١) ق (س) = $\begin{cases} \frac{٣}{\text{س}} & ، -١ \le \text{س} \le ٢ \\ [\text{س} - ١] & ، ٢ < \text{س} < ٥ \end{cases}$ {−١ ، ٠ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

(١) ق (س) = $\begin{cases} ٢\text{س} + ١ & ، ٠ \le \text{س} < ١ \\ [٢\text{س}] & ، ١ \le \text{س} < ٢ \\ \text{س} & ، ٢ \le \text{س} < ٤ \end{cases}$ {٠ ، ١ ، $\frac{٢}{٢}$ ، ٢ ، ٤}

(١٧٨) ما إحداثيات النقطة الواقعة على ق (س) = س^{٢} + ٥ س + ٣ والتي عندها يكون العمودي على المماس موازياً للمستقيم هي = $\frac{١}{٣}$ س + $\frac{١}{٣}$ {(− ١، − ١)}

(١٧٩) إذا كان ق (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ . يقطع محور الصادات في (٠ ، ٣) وله مماسات؛ الأول عند س = - ١ ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات والثاني عند س = ٢ ويصنع زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات أكتب قاعدة الاقتران.

{ق (س) = - $\frac{١}{٣}$ س^{٢} + $\frac{١}{٣}$ س + ٣}

(١٨٠) إذا كان ق (س) = س^{٢} – أ س – (١ – أ) ، ما قيمة أ التي تجعل محور السينات مماساً لمنحناه {قَ (س) = صفر ، أ = ٢}

(١٨١) إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق (س) عند (٣، ٢) هي

٢ص + ٥س = ١٩ عندما س = ٣ أوجد قَ (٣)

(١٨٢) إذا كانت ص = ٣س – ٥ معادلة المماس للمنحنى ق (س) عند س = ٢ وكانت ص = ٢س + ل معادلة العمودي على المماس عند تلك النقطة ما قيمة ل ؟ { $\frac{٥}{٣}$ }

إرشاد: م $_{\text{المماس}}$ × م $_{\text{العمودي}}$ = - ١

(١٨٣) اعتماداً على الشكل فإمذا كان المماس المرسوم للاقتران س ص = ٨ عند (٢، ٤) يقطع المحورين في ب ، جـ ما قيمة $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ {١}

إرشاد: م $_{\text{أب}}$ × م $_{\text{ب جـ}}$ = م $_{\text{المنحنى}}$

ص
مماس
(٠ ، جـ)
أ (٢، ٤)
المنحنى
س
(ب، ٠)

(١٨٤) إذا كان:

(١) ق (س)= ٢ قا^{٢} ٢س أوجد قَ (س) {٤ ظا ٢س}

(٢) ق (س)= س٢ قتا س أوجد قَ ($\frac{\pi}{٦}$) {π $\frac{٢}{٣}$ + $^{٢}\pi$ $\frac{\sqrt{٣}}{١٨}$}

(٣) ق (س)= س + جتا ٢س أوجد قَ ($\frac{\pi}{٤}$) {١ -}

(٤) ق (س)= جا^{٢} ٥س + جتا^{٢} ٥س أوجد قَ (س) {صفر}

(٥) ق (س)= ٣ جا $\frac{٢\pi}{٣}$ أوجد قَ (س) {صفر}

(٦) ق (س)= أ هـ^{س} جاس + ب هـ^{س} جتاس أوجد قَ (س)

{ (أ − ب) هـ^{س} جاس + (أ + ب) هـ^{س} جتاس }

(١٨٥) إذا كانت أو كان:

(١) ص = قا س بين أن $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = ص^{٣} + ص ظا^{٢}س

(٢) ص = س جتا ٣س بين أن $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + ٩ $\frac{د ص}{د س}$ + ١٨ص = صفر

(٣) ص = ظا س + $\frac{١}{٣}$ ظا^{٣}س بين أن $\frac{د ص}{د س}$ = قا^{٤}س

(٤) ص = جاس (١ + جتاس) بين أن $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = - جا س − ٢ جا ٢س

(٥) ص = جا^{٤}س بين أن $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + ١٦ص = ١٢ جا^{٢}س

(٦) ص = (ظاس + قاس) ؟ بين أن $\frac{د ص}{د س}$ = ؟ ص قاس

(٧) جتا (س + ص) = س + ص بين أن $\frac{د ص}{د س}$ = - ١

(٨) ق (س) = س^{٢} − ١ ، هـ (س) = $\frac{١}{س}$ بين أن (ق ∘ هـ)َ (س) = $\frac{-٢}{س^{٣}}$

(٩) ق (جا٢س) = جتا^{٢}س بين أن قَ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ عندما ٠ ≤ س < $\frac{\pi}{٤}$

إرشاد : ق (جا٢س) اقتران مركب

(١٨٦) إذا كانت ص = جتا (جتاس) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ {جاس جا (جتاس)}

إرشاد : اقتران مركب

(١٨٧) إذا كان ص^{٤} + ٣ص + ٣س^{٢} = ٢٤س + ٥

أوجد قيمة س التي تجعل $\frac{د ص}{د س}$ = صفر {٤}

(١٨٨) إذا كان س + ص = س ص بين أن صً = $\frac{٢ ص^{٣}}{س^{٢}}$

(١٨٩) إذا كان ق (٢) = ٦ ، قَ (٢) = − ٢ أوجد ($\sqrt{ق}$)َ (٢) {− $\frac{١}{٣}$ }

(١٩٠) ألقي حجر في بحيرة فسبب أمواجاً دائرية متحدة بالمركز هو مركزها ، أنصاف أقطارها تزداد بمعدل ٠,٥ م/ ث. جد معدل تغير محيط هذه الدوائر {πم/ث}

(١٩١) بالون كروي يزداد حجمه بمعدل ٣ قدم^{٣} / ث أوجد الزيادة في نصف قطره عندما يكون نصف قطره ١,٥ قدم { $\frac{٣}{٤٠\pi}$ }

(١٩٢) بين ان للاقتران ص = جاس (١ + جتاس) قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{\pi}{٣}$

(١٩٣) إذا كان ق (س) = س^{٣} ، هـ (٢) = ٣ ، هـَ (٢) = ٢ ، هـً (٢) = ٥

أوجد (ق ∘ هـ)ً (٢) {١٨٠}

إرشاد: (ق ∘ هـ)′ (٢) = [(ق ∘ هـ)′ (٢)]′ = [قَ (هـ (٢)) × هـَ (٢)]′ ثم استخدم مشتقة حاصل ضرب اقترانين

(١٩٤) سُلم طوله ٢٠ مترا يرتكز على حائط رأسي، فإذا انزلق طرفه السفلي مبتعداً عن الحائط على أرض أفقية بسرعة ٣ متر/ ث فبأي سرعة ينخفض طرفه العلوي عندما يكون ارتفاع رأس السلم عن الأرض ٨ متر؟

(١٩٥) أكتب مجالات تقعر الاقتران (للأسفل وللأعلى) ق (س) = $س^{٥}$ − ٥ $س^{٣}$ على شكل فترات.

(١٩٦) إذا كانت ص = $\sqrt{س + \sqrt{س + \sqrt{س}}}$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

(١٩٧) أوجد جميع المشتقات غير الصفرية التي لا تؤول إلى الصفر للاقتران

ق (س) = $س^{٦}$ − ٢$س^{٣}$ − س + ٢

(١٩٨) إذا كانت ع = ٢٢ − $\frac{٣}{٢}$ س معادلة السعر − الطلب على سلعة ينتجها مصنع ما، وكان اقتران التكلفة ك (س) = س٣ − ٣س٢ + ٤س + ٤، جد عدد الوحدات (س) المطلوب إنتاجها حتى يكون الربح أكبر ما يمكن.

(١٩٩) إذا كانت ص = $\sqrt{ع}$ ، ع = $\sqrt{س}$ أوجد $\frac{د ص}{د س}\Big|_{س=١}$

(٢٠٠) باستخدام التعريف أوجد قَ (س) عندما ق (س) = $س^{٢}$ + $س^{٢}$ + س

(٢٠١) إذا كان ق (س) = ٢س٣ + ١ أوجد

(١) ميل القاطع المار بالنقطتين (١، ق(١)) ، (٢، ق(٢))

(٢) متوسط التغير عندما س تتغير من ١ إلى ٢ ، ماذا تستنتج ؟؟

(٢٠٢) إذا كان ق (س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} − س^{٢} + جـ س^{٢} − س ، هـ (س) = $\frac{١}{٤}$(س − ١)^{٤}
وكانت قً (س) = هـً (س) جد قيمة الثابت جـ .

(٢٠٣) اكتب معادلة المماس للاقتران ق (س) = ٥س^{٢} − ٢س عند النقطة ($\frac{١}{٥}$ ، $\frac{-١}{٥}$)
{ ص = $\frac{-١}{٥}$ }

(٢٠٤) اكتب معادلة المماس للمنحنى ق (س)= $\frac{١}{س}$ ، س≠ صفر عند النقطة (٥، $\frac{١}{٥}$)
{ ص = $\frac{-١}{٢٥}$ س + $\frac{٢}{٥}$ }

(٢٠٥) إذا كان ص = س٢ + $\sqrt{س}$ أوجد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ $|_{س=١}$ = ١

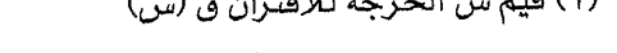
(٢٠٦) إذا كان س٤ + ١ = س + ص٢ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ $|_{(١ ، ١)}$

(٢٠٧) يمثل الشكل المجاور منحنى قَ (س) وقيمة

قَ (٣) = قَ (٥) = ٢

قَ(١) = قَ (٦) = صفر

بالاعتماد عليه أوجد



(١) قيم س الحرجة للاقتران ق (س)

(٢) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق (س)

(٣) فقط القيم القصوى للاقتران ق (س) ونوعها.

(٢٠٨) قطعة أرض مستقيمة الشكل مساحتها ٨٠٠ م٢ تقع على ضفة نهر مستقيم، إذا أراد مالكها نسيجها ولم ينسج الواجهة الواقعة على ضفة النهر، أوجد أبعادها ليكون طول السياج اقصر ما يمكن. { ٢٠ ، ٤٠ }

(٢٠٩) إذا كان:

(١) ق (س) = $(س^٢ - س)^٣$ أوجد قَ (٣)

(٢) ق (س) = $\sqrt[٣]{س} + \sqrt{س}$ أوجد قَ (٦٤)

(٣) ق (س) = ظا٢س أوجد قَ $(\frac{\pi}{٦})$

(٢١٠) تتحرك نقطة على مسار مستقيم معادلته س + ٢ص = ٢، أوجد معدل تغير إحداثها الصادي إذا كان إحداثها السيني يزداد بمعدل ٤ وحدة/ث.

(٢١١) أوجد $\frac{د^٢ص}{د س^٢}$ لكل من:

ص = حاس ، ص = جتاس

(٢١٢) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل من :

(١) ص = $\frac{س^٢ + ١}{س^٢ - ١}$ ، س $\neq$ ١

(٢) ص = $(س^٣ + ١)(س^٣ - ١)$

(٣) ص = $(س^٣ + ١) + (س^٢ - ١)$

(٤) ص = $(س^٣ + ١) - (س^٢ - ١)$

(٢١٣) إذا كان ق (س) = $س^٣$ + ٢س ، هـ (س) = $٣س^٢$

أوجد (قَ ∘ هـ)َ (١) ، (قَ ∘ هـ)ً (١)

إرشاد: التركيب أولاً ثم الاشتقاق

(٢١٤) أوجد قَ (س) لكلٍ من الاقترانات:

(١) ق (س) = $\frac{١}{٥}$ س^{٥} - $\frac{١}{٤}$ س^{٤} + $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + س

(٢) ق (س) = (س - ١) (س + ٢) (س - ٣) (س + ٥)

إرشاد : اجعل الطرف الأيسر قوسين فقط

(٣) ق (س) = (س^{٤} + س^{٢} + ١)^{٢}

(٤) ق (س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س} + ٣}$ ، س ≠ - ٣

(٥) ق (س) = جا (س^{٢} + ٢)

(٢١٥) إذا كان ق(س) = أس٣ + ٢ وكان قَ (١) = ق(١) ما قيمة أ { ١ }

(٢١٦) يتحرك جسيم في خط مستقيم حسب العلاقة ف = ٨ ن - ن^{٢} حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، متى يتوقف الجسم عن الحركة.

{ ٤ ثواني }

(٢١٧) إذا كان (س - ص)^{٢} + (ص - س)^{٢} = ٥ أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

(٢١٨) بالون كروي الشكل ازداد حجمه من ٣٦ π سم^{٣} الى ٥٠ π سم^{٣} بمدة ١٠ ثواني، ما معدل ازدياد نصف قطره خلال هذه المدة.

(٢١٩) دُفِعَ جسم ساكن بقوة مناسبة تتحرك على خط مستقيم حسب العلاقة ف = ٣٢ ؟ − $؟^{٤}$ حيث ف المسافة بالأمتار، ؟ الزمن بالثواني، بعد كم ثانية يخلد الجسم إلى السكون مرة أخرى.

{ بعد ٢ ثانية }

(٢٢٠) إذا كان ق (س) = ٢$س^{٣}$ − ٤س + ٧٢ أوجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{\text{قَ (١ + هـ) − قَ (١)}}{\text{هـ}}$

{ ١٢ }

(٢٢١) إذا كان ق (س) = ك س٣ − ٥ وكان متوسط التغير في الفترة [١، ٣] هو ١٣ ما قيمة ك؟

(٢٢٢) إذا كان العمودي على المماس لمنحنى ص = جـ ($س^{٢}$ − ٥) يمر بنقطة الأصل عند س = ١ فما قيمة جـ.

{ $\frac{-١}{١٠٨}$ }

(٢٢٣) إذا كانت ص = $\sqrt{\text{جا ؟}}$ ، ؟ = $\sqrt{\text{س}}$ أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \Big|_{؟ = \frac{\pi}{٢}}$

{ صفر }

(٢٢٤) بين أن المماسين لمنحنى ق (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ ، هـ (س) = س متعامدان عند نقطة تقاطعهما.

إرشاد : أوجد نقطة التقاطع أولاً

(١) أ . ج مادوكس "مبادئ التحليل الرياضي" ترجمة وليد ديب، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني ١٩٨٤ م.

(٢) ايرل و . سوكوفسكي "حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية" جزءان ، ترجمة أحمد سعيدان ورفاقه، ١٩٨١ م.

(٣) سعد حسنين محمد ورفاقه، "المدخل في الرياضيات الحديثة" ، جزءان، دار المعارف بمصر ، ١٩٧١ م.

(٤) سليمان أبو صبحا "الرياضيات للعلوم الاقتصادية والادارية" مكتبة بغداد –عمان ، ١٩٩٤ م.

(٥) شارلزسولومون، "الرياضيات" ترجمة علي بن الأشهر، معهد الاتحاد العربي، بيروت - ١٩٨١ م.

(٦) عادل سودان ورفاقه "الرياضيات المعاصرة" جزءان، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٩٧١ م.

(٧) عايش زيتون "أساسيات الاحصاء الوصفي" ، دار عمار للنشر والتوزيع، عمان، ١٩٨٤ م.

(٨) عبدالرحيم القواسمة وزميله، "دليل الاختبارات في الرياضيات المعاصرة" جزءان، دار الفرقان للنشر والتوزيع – عمان ، ١٩٨٢ م.

(٩) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الاحصاء"، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.

(١٠) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الرياضيات" ، دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.

(١١) عبدالعزيز هيكل "الرياضة المالية" دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٧٨ م.

(١٢) علي عبدالله الدفاع "نوابغ علماء العرب في الرياضيات" دار الاعتصام.

(١٣) فيجودسكي، "المرجع في الرياضيات العالية" ترجمة أنطون منصور، دار جبر للطباعة والنشر، روسيا – موسكو، ١٩٧٥ م.

(١٤) كما يعقوب "الرياضيات الحديثة" جزءان، دار المعارف بمصر، ١٩٧٣م.

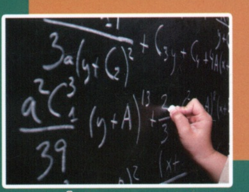
(١٥) محمد عادل سودان، "الرياضيات العامة" ، ثلاثة أجزاء، دار العلوم للطباعة والنشر.

(١٦) محمد عاطف خير الدين ورفاقه، "المثالي في الرياضيات المعاصرة" عدة أجزاء.

(١٧) نيل ديفدسون ورفيقه "الجبر المجرد" ترجمة ديب حسين، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني، ١٩٨٢ م.

(١٨) نخبة من المؤلفين "الرياضيات المدرسية وفق منهاج التربية والتعليم الأردنية"، ٢٠٠٧ م.

(١٩) وليم جويس ورفيقه "مبادئ المعادلات التفاضلية"، ترجمة أحمد علاونه ورفيقه، مركز الكتب الأردني، ١٩٩٠ م.



الرياضيات الشاملة

النهايات والاتصال

التفاضل وتطبيقاته





الأردن - عمان

هاتف: 00962 6 5658253 / 00962 6 5658252
فاكس: 00962 6 5658254 ص.ب: 141781
البريد الإلكتروني: darosama@orange.jo
الموقع الإلكتروني: www.darosama.net